

Θέματα Καγκουρό 2024

Επίπεδο 5

για μαθητές της Β' και Γ' τάξης Λυκείου

Ερωτήσεις 3 πόντων:

1) Ο αριθμός 2024 είναι ένας τετραψήφιος αριθμός ο οποίος έχει τρεις ειδικές ιδιότητες: Περιέχει τρία διαφορετικά ψηφία, κάθε ψηφίο του είναι άρτιος αριθμός και το τελευταίο ψηφίο του είναι ίσο με το άθροισμα των τριών πρώτων ψηφίων. Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί (συμπεριλαμβανομένου του 2024) έχουν αυτές τις τρεις ιδιότητες;

- A) 2 B) 4 Γ) 6 Δ) 7 Ε) 8

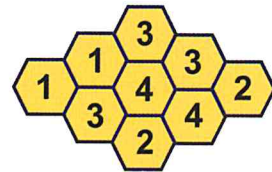
2) Αν $\alpha = 2^{21}$, $\beta = 3^{14}$ και $\gamma = 5^9$, ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό;

- A) $\alpha > \beta > \gamma$ B) $\alpha > \gamma > \beta$ Γ) $\beta > \alpha > \gamma$ Δ) $\beta > \gamma > \alpha$ Ε) $\gamma > \beta > \alpha$

3) Ο Απόλλωνας έριχνε βέλη σε έναν στόχο. Ξεκίνησε με 10 βέλη. Κέρδιζε 2 νέα βέλη κάθε φορά που πετύχαινε τον στόχο του. Συνολικά, ο Απόλλωνας έριξε 20 βέλη. Στο τέλος δεν του έμεινε κανένα βέλος. Πόσες φορές πέτυχε τον στόχο του ο Απόλλωνας;

- A) 5 B) 6 Γ) 7 Δ) 10 Ε) 12

4) Το σχήμα δείχνει μια κηρήθρα με 9 εξαγωνικά κελιά. Ορισμένα κελιά περιέχουν μέλι. Ο αριθμός σε κάθε κελί δείχνει πόσα **γειτονικά** του κελιά περιέχουν μέλι (λέμε ότι δύο κελιά είναι γειτονικά αν έχουν μια κοινή πλευρά). Πόσα κελιά περιέχουν μέλι;

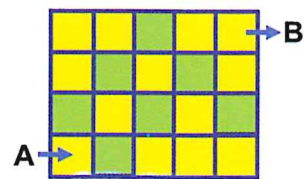


- A) 4 B) 5 Γ) 6 Δ) 7 Ε) 8

5) Πόσοι από τους πέντε αριθμούς α) $2^{98} + 2^{100}$, β) $3^{98} + 3^{100}$, γ) $5^{100} - 5^{98}$, δ) $6^{100} + 4$, ε) $9^{99} + 1$ είναι πολλαπλάσια του 10;

- A) 1 B) 2 Γ) 3 Δ) 4 Ε) 5

6) Ένα καγκουρό θέλει να διασχίσει το πάρκο πηγαίνοντας από το σημείο A στο B, όπως στην εικόνα. Μπορεί να κινηθεί μόνο προς τα δεξιά ή προς τα πάνω. Κάθε φορά που μπαίνει σε ένα πράσινο τετράγωνο πρέπει να πληρώσει 1 ευρώ. Κάθε φορά που μπαίνει σε ένα κίτρινο τετράγωνο πρέπει να πληρώσει 2 ευρώ. Πόσο κοστίζει το φθηνότερο μονοπάτι;



- A) 11 ευρώ B) 12 ευρώ Γ) 13 ευρώ Δ) 14 ευρώ Ε) 15 ευρώ

Ερωτήσεις 4 πόντων:

11) Ένας μαθητής έβγαλε 4 παιχνίδια από τα κουτιά τους για να παίξει. Όταν τελείωσε το παιχνίδι, τα έβαλε πίσω στα κουτιά με τυχαία σειρά. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;

- A) Είναι βέβαιο ότι κανένα από τα 4 παιχνίδια δεν επιστράφηκε στο σωστό του κουτί.
 B) Είναι βέβαιο ότι ακριβώς 1 παιχνίδι επιστράφηκε στο σωστό του κουτί.
 Γ) Είναι αδύνατον ακριβώς 2 παιχνίδια να επιστραφούν στα σωστά τους κουτιά.
 Δ) Είναι αδύνατον ακριβώς 3 παιχνίδια να επιστραφούν στα σωστά τους κουτιά.
 Ε) Είναι αδύνατον και τα 4 παιχνίδια να επιστραφούν στα σωστά τους κουτιά.

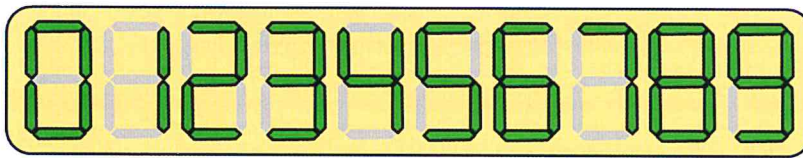
12) Οι πραγματικοί αριθμοί α , β και γ ικανοποιούν τις συνθήκες $2^\alpha = 3$, $2^\beta = 7$ και $6^\gamma = 7$. Ποια από τις παρακάτω δίνει την σχέση μεταξύ των α , β και γ ?

- A) $\gamma = \frac{\beta}{\alpha+1}$ B) $\gamma = \frac{\alpha}{\beta} + 1$ Γ) $\gamma = \frac{\beta}{\alpha} - 1$ Δ) $\gamma = \frac{\alpha}{\beta-1}$ Ε) $\gamma = \beta - \frac{1}{\alpha}$

13) Ο κύριος Αριθμόπουλος βρήκε το μικρότερο πολλαπλάσιο του 12 του οποίου η δεκαδική αναπαράσταση περιέχει μόνο τα ψηφία 2 και 3. Πόσο είναι το γινόμενο ψηφίων αυτού του αριθμού;

- A) 12 B) 18 Γ) 21 Δ) 24 Ε) 32

14) Τα ψηφία 0 έως 9 στα ψηφιακά ρολόγια σχεδιάζονται με οριζόντια και κάθετα τμήματα, όπως στην εικόνα.



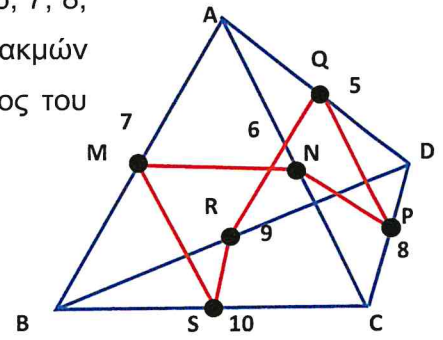
Ένας ρολογάς επέλεξε τρία διαφορετικά ψηφία. Συνολικά, τα τρία ψηφία που επέλεξε έχουν 5 οριζόντια και 10 κάθετα τμήματα. Πόσο είναι το άθροισμα των τριών αυτών ψηφίων;

- A) 9 B) 10 Γ) 14 Δ) 18 Ε) 19

15) Ένας μαθητής έγραψε στον πίνακα τον αριθμό 1. Μετά τον πολλαπλασίασε είτε με το 6 είτε με το 10. Στη συνέχεια πολλαπλασίασε το αποτέλεσμα είτε με το 6 είτε με το 10, και συνέχισε αυτήν την διαδικασία πολλές φορές. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς **δεν** μπορεί να είναι κάποιο από τα γινόμενα που προέκυψαν;

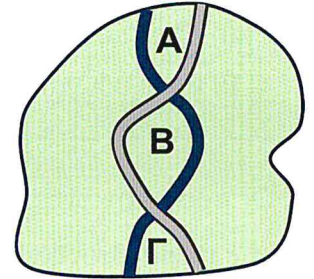
- A) $2^{50}5^{50}$ B) $2^{90}3^{20}5^{70}$ Γ) $2^{90}3^{20}5^{80}$ Δ) $2^{100}3^{20}5^{80}$ Ε) $2^{110}3^{80}5^{30}$

16) Μια τριγωνική πυραμίδα ABCD έχει πλευρές μήκους 5, 6, 7, 8, 9 και 10. Τα σημεία M, N, P, Q, R και S είναι τα μέσα των ακμών της πυραμίδας, όπως στην εικόνα. Πόση είναι η περίμετρος του εξαγώνου MNPQRS (κόκκινη γραμμή);



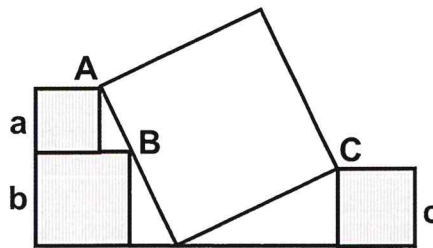
- A) 19 B) 20 Γ) 21
 Δ) 22 Ε) 23

17) Η εικόνα δείχνει ένα μαύρο μονοπάτι και ένα γκρι μονοπάτι που διασχίζουν ένα πάρκο. Κάθε ένα από τα δύο μονοπάτια χωρίζει το πάρκο σε δύο περιοχές με ίσα εμβαδά. Ποιο από τα παρακάτω είναι σίγουρα σωστό για τα εμβαδά των περιοχών A, B και Γ;



- A) $A = \Gamma$ B) $B = A + \Gamma$ Γ) $B = \frac{1}{2}(A + \Gamma)$
 Δ) $B = \frac{2}{3}(A + \Gamma)$ Ε) $B = \frac{3}{5}(A + \Gamma)$

18) Το σχήμα δείχνει τρία μικρά τετράγωνα (τα γκρι) και ένα μεγάλο τετράγωνο (το λευκό). Τα μικρά τετράγωνα έχουν μήκη πλευρών a, b και c. Οι κορυφές A και C δύο μικρών τετραγώνων συμπίπτουν με δύο κορυφές του μεγάλου τετραγώνου. Η κορυφή B του τρίτου μικρού τετραγώνου βρίσκεται πάνω σε μία πλευρά του μεγάλου. Πόσο είναι το μήκος της πλευράς του μεγάλου τετραγώνου;



- A) $\frac{1}{2}(a + b + c)$ B) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ Γ) $\sqrt{(a + b)^2 + c^2}$
 Δ) $\sqrt{(b - a)^2 + c^2}$ Ε) $\sqrt{a^2 + ab + b^2 + c^2}$

19) Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί υπάρχουν που περιέχουν τουλάχιστον ένα από τα ψηφία 1, 2 ή 3;

- A) 27 B) 147 Γ) 441 Δ) 557 Ε) 606

20) Στον πίνακα είναι γραμμένος ένας τετραψήφιος φυσικός αριθμός ABΓΔ (τα ψηφία του έχουν αντικατασταθεί με γράμματα, και βέβαια ισχύει $A > 0$). Αν τοποθετήσουμε μια υποδιαστολή μεταξύ του B και του Γ, διαπιστώνουμε ότι ο αριθμός AB,ΓΔ που προκύπτει είναι ο μέσος όρος των διψήφιων αριθμών AB και ΓΔ. Ποια είναι η τιμή του αθροίσματος $A + B + \Gamma + \Delta$;

- A) 14 B) 18 Γ) 21 Δ) 25 Ε) 27

Ερωτήσεις 5 πόντων:

21) Είναι γνωστό ότι είναι αληθής **ακριβώς μία** από τις παρακάτω προτάσεις σχετικά με έναν συγκεκριμένο φυσικό αριθμό N . Ποια είναι η αληθής πρόταση;

- A) ο N είναι πολλαπλάσιο του 3 B) ο N είναι πολλαπλάσιο του 6 Γ) $N=2$
 Δ) ο N είναι περιττός Ε) ο N είναι πρώτος

22) Πόσοι ακέραιοι N υπάρχουν με την ιδιότητα ο $\frac{N+6}{N-6}$ να είναι ακέραιος;

- A) 4 B) 6 Γ) 8 Δ) 12 Ε) κανένας

23) Μια γιαγιά έχει μερικές καραμέλες. Αποφασίζει να τις μοιράσει στα εγγόνια της, έτσι ώστε το καθένα να πάρει ένα πακέτο που περιέχει τον ίδιο αριθμό από καραμέλες. Σε κάθε πακέτο θέλει να βάλει όσο γίνεται περισσότερες καραμέλες. Όταν έφτιαξε τα πακέτα παρατήρησε ότι το καθένα περιείχε 20 καραμέλες και ότι περίσσεψαν 12. Ποιος είναι ο μικρότερος δυνατός αριθμός από καραμέλες που θα μπορούσε να είχε αρχικά η γιαγιά;

- A) 52 B) 232 Γ) 272 Δ) 411 Ε) 432

24) Μια πραγματική συνάρτηση f ικανοποιεί $f(20-x) = f(22+x)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x . Είναι γνωστό ότι η f έχει ακριβώς δύο ρίζες. Πόσο είναι το άθροισμα αυτών των δύο ριζών;

- A) -1 B) 20 Γ) 21 Δ) 22 Ε) κανένα από τα προηγούμενα

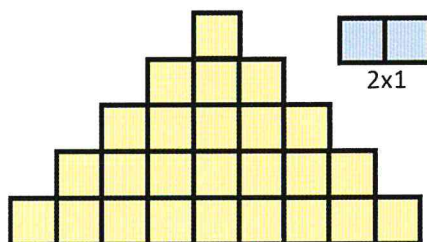
25) Ένα πολυώνυμο p ικανοποιεί την σχέση $p(x+1) = x^2 - x + 2p(6)$, για κάθε πραγματικό αριθμό x . Πόσο είναι το άθροισμα των συντελεστών του p ;

- A) -40 B) -6 Γ) 12 Δ) 40 Ε) κανένα από τα προηγούμενα

26) Ο καθηγητής των Μαθηματικών έριξε ένα ζάρι 100 φορές και πολλαπλασίασε όλους τους αριθμούς των πόντων που έδειξαν τα ζάρια. Το γινόμενο που βρήκε ήταν 6^{70} . Ποιος είναι ο μικρότερος δυνατός αριθμός φορών που θα μπορούσε να εμφανιστεί ο αριθμός 6 για να βρει το συγκεκριμένο γινόμενο;

- A) 9 B) 10 Γ) 12 Δ) 24 Ε) 30

27) Η εικόνα δείχνει ένα σχήμα που αποτελείται από 1×1 τετράγωνα. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός από πλακάκια διαστάσεων 2×1 που μπορούμε να τοποθετήσουμε στο σχήμα; Τα πλακάκια πρέπει να τοποθετούνται οριζόντια ή κάθετα καλύπτοντας τετράγωνα του σχήματος, και δεν πρέπει να επικαλύπτονται μεταξύ τους.



- A) 8 B) 9 Γ) 10 Δ) 11 E) 12

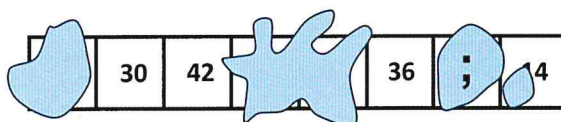
28) Σε ένα χαρτί είναι γραμμένοι οι φυσικοί αριθμοί από τον 1 έως τον 15. Η Καθηγήτρια θέλει να σβήσει μερικούς από αυτούς τους αριθμούς και στη συνέχεια να χωρίσει τους υπόλοιπους σε δύο ομάδες, έτσι ώστε τα γινόμενα των αριθμών σε κάθε ομάδα να είναι ίσα. Ποιο είναι το μικρότερο δυνατό πλήθος αριθμών που θα μπορούσε να σβήσει η Καθηγήτρια;

- A) 1 B) 2 Γ) 3 Δ) 4 E) 5

29) Ένας καλλιτέχνης έχει μερικούς γαλάζιους, μερικούς κόκκινους και μερικούς κίτρινους κύβους του ίδιου μεγέθους. Με 27 από αυτούς θέλει να κτίσει έναν $3 \times 3 \times 3$ κύβο. Θέλει η επιφάνεια του κύβου να είναι κατά το ένα τρίτο γαλάζια, κατά το ένα τρίτο κόκκινη και κατά το ένα τρίτο κίτρινη. Ποιος είναι ο μικρότερος και ποιος είναι ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός γαλάζιων κύβων που μπορεί να χρησιμοποιήσει;

- A) 6 και 13 αντίστοιχα B) 5 και 13 αντίστοιχα Γ) 6 και 12 αντίστοιχα
 Δ) 5 και 12 αντίστοιχα E) 5 και 14 αντίστοιχα

30) Μια λωρίδα χαρτιού αποτελείται από οκτώ τετράγωνα. Αρχικά κάθε τετράγωνο περιέχει τον αριθμό 0. Κατόπιν κάνουμε την εξής κίνηση πολλές φορές: Επιλέγουμε 4 διαδοχικά τετράγωνα και προσθέτουμε 1 σε κάθε έναν από τους αριθμούς σε αυτά τα τετράγωνα. Η εικόνα δείχνει το αποτέλεσμα μετά από μερικές τέτοιες κινήσεις. Δυστυχώς μερικά από τα τετράγωνα καλύφθηκαν από μελάνι. Ποιος αριθμός είναι γραμμένος στο τετράγωνο με το ερωτηματικό;



- A) 24 B) 30 Γ) 36 Δ) 48 E) κανένα από τα προηγούμενα