

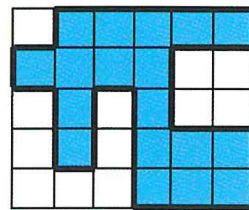
Θέματα Καγκουρό 2023

Επίπεδο 5

για μαθητές της Β' και Γ' τάξης Λυκείου

Ερωτήσεις 3 πόντων:

1) Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι χωρισμένο σε 30 ίσα τετράγωνα, όπως στην εικόνα. Η περίμετρος του γαλάζιου πολυγώνου είναι 60 m. Πόσο είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου;



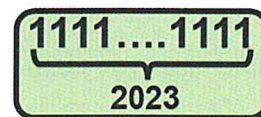
- A) 30 m^2 B) 48 m^2 Γ) 60 m^2 Δ) 90 m^2 Ε) 120 m^2

2) Ένας ζαχαροπλάστης έχει στην διάθεσή του μερικά σοκολατάκια. Τα 100 είναι στρογγυλά, τα 70 είναι τριγωνικά και 50 είναι τετράγωνα. Θέλει να φτιάξει όσο γίνεται περισσότερες συσκευασίες όπως την εικονιζόμενη. Πόσα σοκολατάκια θα του περισσέψουν;



- A) 1 B) 12 Γ) 13 Δ) 14 Ε) κανένα από τα προηγούμενα

3) Συμβολίζουμε με A τον φυσικό αριθμό ο οποίος αποτελείται από 2023 επαναλήψεις του ψηφίου 1. Πόσο είναι το άθροισμα των ψηφίων του γινομένου $A \times 1111$;



- A) 8080 B) 8083 Γ) 8086 Δ) 8092 Ε) 8101

4) Ένας χρυσοχόος έχει δύο κομμάτια μετάλλου. Το πρώτο ζυγίζει 320 gr και περιέχει 80% χρυσό. Το δεύτερο ζυγίζει 180 gr και περιέχει χρυσό αλλά ο χρυσοχόος δεν θυμάται σε τι ποσοστό. Ο χρυσοχόος έλιωσε μαζί τα δύο κομμάτια για να φτιάξει ένα καινούργιο κράμα. Αν το καινούργιο κράμα περιέχει χρυσό σε ποσοστό 62% του βάρους τι ποσοστό χρυσού περιείχε το δεύτερο από τα δύο αρχικά κομμάτια;

- A) 50% B) 40% Γ) 36% Δ) 30% Ε) 25%

5) Πόσοι φυσικοί αριθμοί N από το 1 έως το 100 έχουν την ιδιότητα ο N^2 και ο N^3 να αποτελούνται από ίσο πλήθος ψηφίων;

- A) 3 B) 4 Γ) 5 Δ) 10 Ε) κανένα από τα προηγούμενα

6) Για οποιονδήποτε θετικό φυσικό αριθμό N, συμβολίζουμε με $N!$ το γινόμενο όλων των φυσικών αριθμών από το 1 έως το N. Για παράδειγμα $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Ποιο είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $100! - 1$ όταν διαιρεθεί με το 90;

- A) 0 B) 1 Γ) 9 Δ) 10 Ε) κανένα από τα προηγούμενα

7) Δίνεται ότι η εξίσωση $\alpha(x+1)^{100} + \beta(x+1)^{50} + \gamma = 0$ έχει ρίζα την $x = 5$. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι σίγουρα ρίζα της ίδιας εξίσωσης;

- A) -7 B) -5 Γ) -4 Δ) 0 Ε) δεν μπορούμε να ξέρουμε

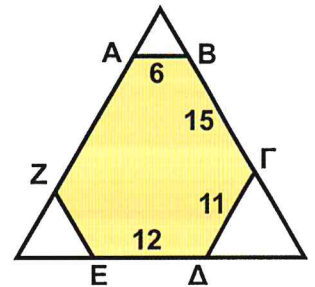
8) Αν $2^{\alpha} = 5$ και $5^{\beta} = 8$, με πόσο ισούται το γινόμενο $\alpha\beta$;

- A) 4 B) 3 Γ) 2 Δ) 1 Ε) 0

9) Ένα πολυώνυμο P ικανοποιεί την σχέση $P(x+2) = 9 - 2x + 2P(6)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x . Με πόσο ισούται το $P(4)$;

- A) -1 B) 0 Γ) 1 Δ) 2 Ε) 3

10) Ένα **ισόπλευρο** τρίγωνο περιέχει ένα εξαγώνο ΑΒΓΔΕΖ. Οι πλευρές του εξαγώνου είναι είτε πάνω στις πλευρές του ισοπλεύρου τριγώνου ή είναι παράλληλες προς αυτές, όπως στην εικόνα. Τέσσερις από τις πλευρές του εξαγώνου έχουν τα σημειωμένα μήκη. Πόση είναι η περίμετρος του εξαγώνου;



- A) 64 B) 66 Γ) 68 Δ) 70 Ε) 72

Ερωτήσεις 4 πόντων:

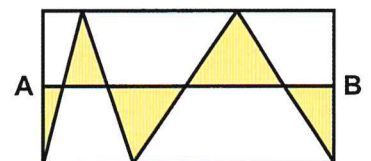
11) Πόσοι **φυσικοί αριθμοί** N είναι ρίζες της εξίσωσης $\sqrt{N^2 - 45} + \sqrt{50 - N^2} = N - 4$;

- A) 0 B) 1 Γ) 2 Δ) 3 Ε) 4

12) Η Δασκάλα των Μαθηματικών έγραψε σε ένα χαρτί όλους τους φυσικούς αριθμούς N που έχουν ακριβώς τρεις διαιρέτες, και συγκεκριμένα τους 1, 2 και τον ίδιο τον N . Πόσοι τέτοιοι φυσικοί αριθμοί N υπάρχουν;

- A) 0 B) 1 Γ) 2 Δ) 3 Ε) 4

13) Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο της εικόνας τα σημεία A και B είναι τα μέσα δύο απέναντι πλευρών του. Τι κλάσμα του εμβαδού του ορθογώνιου είναι σκιασμένο;



- A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{1}{6}$ Γ) $\frac{1}{5}$ Δ) $\frac{1}{4}$ Ε) $\frac{1}{3}$

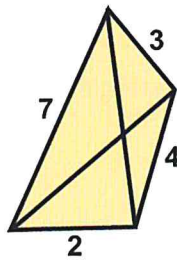
14) Πόσα ζεύγη (x, y) φυσικών αριθμών x και y ικανοποιούν την εξίσωση $x+2y = 2^{10}$;

- A) 2^9-1 B) 2^9 Γ) 2^9+1 Δ) 2^9+2 Ε) 2^{10}

15) Δίνονται πραγματικοί αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ και α_5 των οποίων το άθροισμα είναι Σ . Είναι γνωστό ότι για κάθε έναν από τους δείκτες k με $1 \leq k \leq 5$ ισχύει $\alpha_k = k + \Sigma$. Ποια είναι η τιμή του Σ ;

- A) $-\frac{15}{4}$ B) $\frac{15}{4}$ Γ) -15 Δ) -5 Ε) κανένα από τα προηγούμενα

16) Μια τριγωνική πυραμίδα έχει ακμές ακέραιου μήκους. Τέσσερα από αυτά τα μήκη είναι όπως δείχνει η εικόνα. Πόσο είναι το άθροισμα των μηκών των άλλων δύο ακμών;



- A) 9 B) 10 Γ) 11 Δ) 12 Ε) 13

17) Πόσα ζεύγη (m, n) ακεραίων m και n ικανοποιούν την ανισότητα $|2m - 2023| + |2n - m| \leq 1$;

- A) 0 B) 1 Γ) 2 Δ) 3 Ε) 4

18) Ο αριθμός 5^{5^6} (δηλαδή ο 5 υψωμένος στην δύναμη 5^6) μπορεί να γραφτεί στην μορφή N^N για κάποιον φυσικό αριθμό N . Ποιος είναι ο N ;

- A) 5^{30} B) 5^{11} Γ) 5^6 Δ) 5^5 Ε) 30

19) Ο N και ο $3N+6$ είναι και οι δύο διψήφιοι φυσικοί αριθμοί. Τα ψηφία του $3N+6$ είναι τα ίδια με τα ψηφία του N αλλά με ανάποδη σειρά. Πόσο είναι το άθροισμα των ψηφίων του N ;

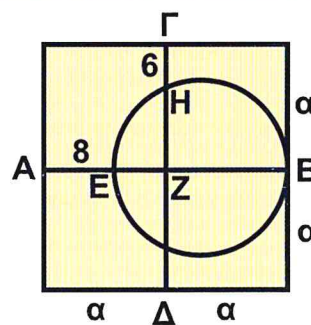
- A) 6 B) 7 Γ) 8 Δ) 9 Ε) 10

20) Ποιος είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός v έτσι ώστε το **κλειστό** διάστημα $\left[\frac{v+8}{2}, \frac{2v+14}{3}\right]$ να περιέχει τουλάχιστον τέσσερις φυσικούς αριθμούς;

- A) 15 B) 16 Γ) 17 Δ) 18 Ε) κανένα από τα προηγούμενα

Ερωτήσεις 5 πόντων:

21) Το τετράγωνο της εικόνας χωρίζεται σε τέσσερα ίσα τετράγωνα πλευράς α . Η AB και η $\Gamma\Delta$ είναι, αντίστοιχα, παράλληλες προς τις πλευρές του τετραγώνου. Ο κύκλος έχει την διάμετρό του EB επί της AB και εφάπτεται του τετραγώνου στο B . Αν $AE = 8$ και $H\Gamma = 6$, πόσο είναι το μήκος α της πλευράς των μικρών τετραγώνων;



- A) 9 B) 10 Γ) 11 Δ) 12 Ε) 13

22) Μία παρέα από 20 ζώα πήγαν στο θέατρο. Κάθε ζώο είναι είτε καγκουρό είτε σκύλος. Έκατσαν σε μία σειρά του θεάτρου, το ένα δίπλα από το άλλο. Όλα τα ζώα έκατσαν δίπλα σε τουλάχιστον ένα καγκουρό. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός από σκύλους στην παρέα;

- A) 8 B) 9 Γ) 10 Δ) 11 Ε) 12

23) Μια πραγματική συνάρτηση ικανοποιεί για κάθε πραγματικό αριθμό x τις ανισώσεις

$$f(x-5)+2 \leq x-2023 \leq f(x+4)-7$$

Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι ρίζα της f ;

- A) 2016 B) 2020 Γ) 2021 Δ) 2023 Ε) 2025

24) Τα γραφήματα των συναρτήσεων $y = x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4$ διέρχονται όλα από ένα και το αυτό σημείο, οποιαδήποτε και αν είναι η τιμή του a . Πόσο είναι το άθροισμα των συντεταγμένων αυτού του σημείου;

- A) 2 B) 4 Γ) 7 Δ) 8 Ε) κανένα από τα προηγούμενα

25) Πόσοι φυσικοί αριθμοί είναι διαιρέτες του $2^{20}3^{23}$ αλλά δεν είναι διαιρέτες του $2^{10}3^{20}$;

- A) 13 B) 30 Γ) 273 Δ) 460 Ε) κανένα από τα προηγούμενα

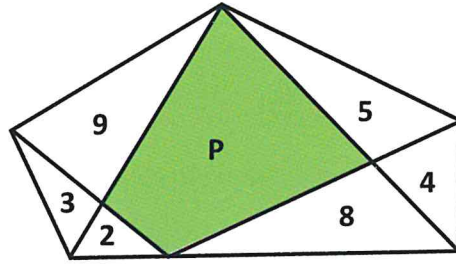
26) Δύο πραγματικές συναρτήσεις f και g ικανοποιούν το σύστημα των εξισώσεων

$$f(x) + 2g(1-x) = x^2 \text{ και } f(1-x) - g(x) = x^2.$$

Ποια είναι η συνάρτηση f ;

- A) $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ B) $x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ Γ) $-x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$
 Δ) $x^2 - 4x + 5$ Ε) δεν υπάρχουν τέτοιες συναρτήσεις

27) Ένα πεντάγωνο είναι χωρισμένο σε επτά μικρότερα μέρη, όπως στην εικόνα. Οι αριθμοί μέσα στα τρίγωνα δηλώνουν το εμβαδόν τους. Πόσο είναι το εμβαδόν P του σκιασμένου τετραπλεύρου;



- A) 15 B) 16 Γ) $\frac{33}{2}$ Δ) 17 E) 18

28) Ποιος είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης όλων των αριθμών της μορφής

$$v^2(v+1)^2(v+2)^2(v+3)^2(v+4)^2,$$

όπου v μη μηδενικός φυσικός αριθμός;

- A) $2^4 3^2$ B) $2^2 3^2 5^2$ Γ) $2^3 3^2 5^2$ Δ) $2^4 3^2 5^2$ E) $2^6 3^2 5^2$

29) Θέλουμε να τοποθετήσουμε τους αριθμούς από τον 1 έως τον 11, ανά έναν, στα εξάγωνα της εικόνας. Θέλουμε το άθροισμα των τριών αριθμών γύρω από καθεμία από τις έξι μαύρες κουκκίδες να είναι το ίδιο. Τρεις από τους αριθμούς έχουν ήδη τοποθετηθεί. Ποιος αριθμός πρέπει να τοποθετηθεί στο εξάγωνο με το ερωτηματικό;



- A) 1 B) 3 Γ) 5 Δ) 7 E) 9

30) Σε ένα χαρτί είναι γραμμένο ένα πολυώνυμο πέμπτου βαθμού με ακέραιους συντελεστές. Δυστυχώς ένα τμήμα του δεν φαίνεται γιατί σκεπάστηκε από μελάνι. Δίνεται ότι και οι 5 ρίζες του πολυωνύμου είναι ακέραιοι αριθμοί. Ποια είναι η μεγαλύτερη δυνατή δύναμη του x-1 που διαιρεί το πολυώνυμο;

$$x^5 - 11x^4 + \text{[cloud]} - 7$$

- A) x-1 B) $(x-1)^2$ Γ) $(x-1)^3$ Δ) $(x-1)^4$ E) $(x-1)^5$