

Θέματα Καγκουρό 2020

Επίπεδο 5

για μαθητές της Β' και Γ' τάξης Λυκείου

Ερωτήσεις 3 πόντων:

1) Ποια είναι η τιμή της παράστασης $\frac{1010^2+2020^2+3030^2}{2020}$;

Α) 2020

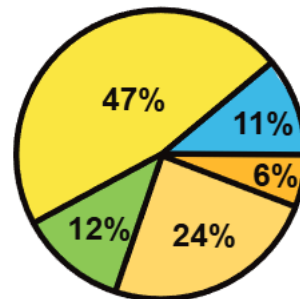
Β) 3030

Γ) 4040

Δ) 6060

Ε) 7070

2) Η εικόνα δείχνει ένα κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων για τον τρόπο που οι μαθητές πηγαίνουν στο Σχολείο. Οι μαθητές που πηγαίνουν με ποδήλατο είναι περίπου διπλάσιοι από αυτούς που πηγαίνουν με λεωφορείο. Επίσης, οι μαθητές που πηγαίνουν με τα πόδια είναι περίπου ίσοι με αυτούς που πηγαίνουν με αυτοκίνητο. Οι υπόλοιποι χρησιμοποιούν μηχανάκι. Τι ποσοστό των μαθητών πηγαίνουν στο Σχολείο με μηχανάκι;



Α) 6%

Β) 11%

Γ) 12%

Δ) 24%

Ε) 47%

3) Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, όποια τιμή και αν πάρει ο φυσικός αριθμός n ;

Α) $5n+1$ Β) n^2 Γ) $n(n+1)$ Δ) $6n-1$ Ε) n^3-2

4) Πόσοι ακέραιοι αριθμοί υπάρχουν στο διάστημα $(40 - \sqrt{30}, 40 + \sqrt{50})$;

Α) 9

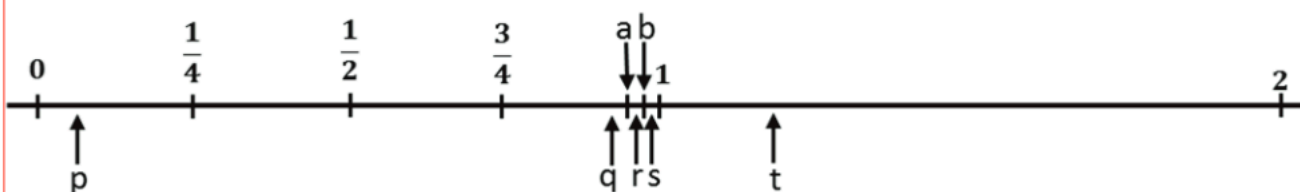
Β) 10

Γ) 11

Δ) 12

Ε) 13

5) Στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι σημειωμένα δύο σημεία a και b , όπως στο σχήμα. Ποιο από τα σημεία p, q, r, s, t παριστάνει το γινόμενο ab ;

Α) p Β) q Γ) r Δ) s Ε) t

6) Το άθροισμα πέντε τριψήφιων αριθμών είναι 2664, όπως δείχνει η εικόνα. Ποια είναι η τιμή του $A+B+\Gamma+\Delta+E$;

Α) 4

Β) 14

Γ) 24

Δ) 34

Ε) 44

	A	B	Γ
	B	Γ	Δ
	Γ	Δ	E
+	Δ	E	A
	E	A	B
	2	6	6
			4

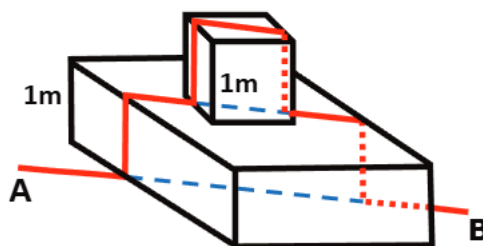
7) Έστω a , b και γ τρεις ακέραιοι. Ποια από τις παρακάτω τιμές **αποκλείεται** να είναι η τιμή της παράστασης $(a - b)^2 + (b - \gamma)^2 + (\gamma - a)^2$;

- A) 0 B) 1 Γ) 2 Δ) 6 E) 8

8) Τρεις ακέραιοι a , b και c ικανοποιούν $1 \leq a \leq b \leq c$ και $abc = 10^6$. Ποια είναι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή που μπορεί να πάρει ο b ;

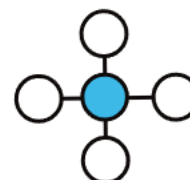
- A) 100 B) 250 Γ) 500 Δ) 1000 E) 2000

9) Ένα μυρμήγκι περπατάει κάθε μέρα πάνω σε μία ευθεία γραμμή από το A στο B, μήκους 5 m στο οριζόντιο επίπεδο. Κάποια μέρα οι άνθρωποι έβαλαν πάνω στην διαδρομή του δύο ορθογώνια παραλληλεπίπεδα ύψους 1 μέτρο το κάθε ένα, όπως στην εικόνα. Τώρα το μυρμήγκι ακολουθεί την ίδια διαδρομή με μόνη διαφορά ότι σε κάποια σημεία πρέπει να περπατήσει κατακόρυφα προς τα πάνω ή κατακόρυφα προς τα κάτω για να υπερβεί τα εμπόδια. Η νέα διαδρομή φαίνεται στην εικόνα. Πόσο είναι το μήκος της νέας διαδρομής;



- A) 7 m B) 9 m Γ) $5 + 4\sqrt{2}$ m Δ) $9 - 2\sqrt{2}$ m
E) το μήκος της διαδρομής εξαρτάται από τις γωνίες με τις οποίες συναντά τα εμπόδια

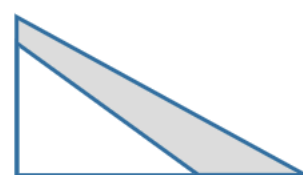
10) Ο Πυθαγόρας θέλει να βάλει τους πέντε αριθμούς 1, 2, 3, 4 και 5 στους κύκλους, από έναν σε κάθε κύκλο. Θέλει το άθροισμα των τριών αριθμών στην γραμμή να ισούται με το άθροισμα των τριών αριθμών στην στήλη. Ποιον αριθμό θα μπορούσε να βάλει στον κεντρικό γαλάζιο κύκλο;



- A) μόνο τον 3 B) μόνο τον 5 Γ) μόνο τους 3 ή 5
Δ) οποιονδήποτε από τους 2 ή 4 E) οποιονδήποτε από τους 1, 3 ή 5

Ερωτήσεις 4 πόντων:

11) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, η βάση αυξήθηκε κατά 50% και το ύψος του αυξήθηκε κατά 20%, όπως στο σχήμα. Το νέο ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίστηκε έχει εμβαδόν κατά 60 cm^2 μεγαλύτερο από το αρχικό. Πόσο ήταν το εμβαδόν του αρχικού ορθογωνίου τριγώνου;



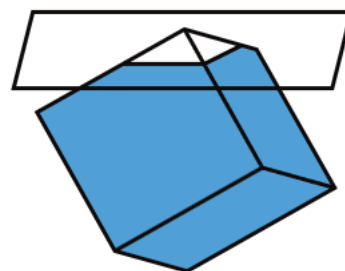
- A) 60 cm^2 B) 65 cm^2 Γ) 70 cm^2 Δ) 75 cm^2 E) 80 cm^2

12) Πέντε στρογγυλές μάρκες είναι λευκές από την μία πλευρά και μαύρες από την άλλη. Αυτή την στιγμή βρίσκονται στο τραπέζι με την λευκή πλευρά προς τα πάνω. Σε κάθε κίνηση αναποδογυρίζουμε ακριβώς τρεις μάρκες. Ποιος είναι ο πιο μικρός αριθμός κινήσεων που μπορούμε να κάνουμε ώστε όλες οι μάρκες να βρεθούν με την μαύρη πλευρά προς τα πάνω;



- A) 2 B) 3 Γ) 4 Δ) 5 E) δεν είναι δυνατόν να πετύχουμε το ζητούμενο

13) Ένα παγόβουνο έχει σχήμα κύβου. Το 90% του όγκου του είναι κάτω από την επιφάνεια του νερού. Τρεις ακμές του είναι εν μέρει ορατές έξω από το νερό. Τα ορατά τμήματα των ακμών έχουν μήκος 24 m, 25 m και 27 m. Πόσο είναι το μήκος της ακμής του κύβου;

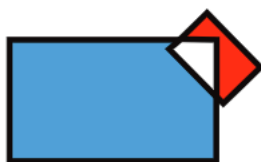


- A) 30 m B) 32 m Γ) 34 m Δ) 35 m E) 39 m

14) Ένα γαλάζιο και ένα κόκκινο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο τέμνονται. Η εικόνα δείχνει τέσσερις διαφορετικές θέσεις τους. Συμβολίζουμε με Γ το εμβαδόν της περιοχής στο γαλάζιο παραλληλόγραμμο που δεν είναι στο κόκκινο, και με Κ το εμβαδόν της περιοχής που είναι στο κόκκινο αλλά όχι στο γαλάζιο. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή για την διαφορά Γ - Κ;



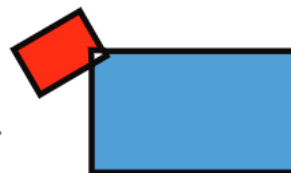
περίπτωση 1



περίπτωση 2



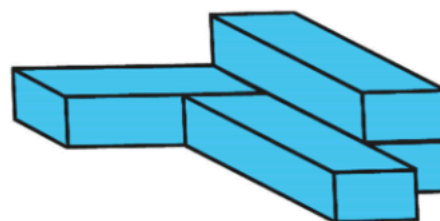
περίπτωση 3



περίπτωση 4

- A) στην περίπτωση 1 η διαφορά Γ- Κ είναι μεγαλύτερη από ότι στις άλλες περιπτώσεις
 B) στην περίπτωση 2 η διαφορά Γ- Κ είναι μεγαλύτερη από ότι στις άλλες περιπτώσεις
 Γ) στην περίπτωση 3 η διαφορά Γ- Κ είναι μεγαλύτερη από ότι στις άλλες περιπτώσεις
 Δ) στην περίπτωση 4 η διαφορά Γ- Κ είναι μεγαλύτερη από ότι στις άλλες περιπτώσεις
 E) η διαφορά Γ- Κ είναι ίδια σε όλες τις περιπτώσεις

15) Τέσσερα ίδια κουτιά κολλήθηκαν μεταξύ τους, όπως στην εικόνα. Το κάθε κουτί χρειάζεται 1 λίτρο μπογιάς για να βαφτεί εξωτερικά. Πόσα λίτρα μπογιάς χρειάζονται για να βαφτεί εξωτερικά η κατασκευή;



- A) 2,5 B) 3 Γ) 3,25 Δ) 3,5 E) 4

16) Ορίζουμε μία ακολουθία f_1, f_2, f_3, \dots ως εξής: Θέτουμε $f_1 = 1, f_2 = 3$ και μετά, κάθε επόμενος όρος είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενων του, με σύμβολα $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ για κάθε $n \geq 1$. Οι αρχικοί όροι είναι οι 1, 3, 4, 7, 11, ... και λοιπά. Πόσοι από τους πρώτους 2020 όρους είναι άρτιοι αριθμοί;

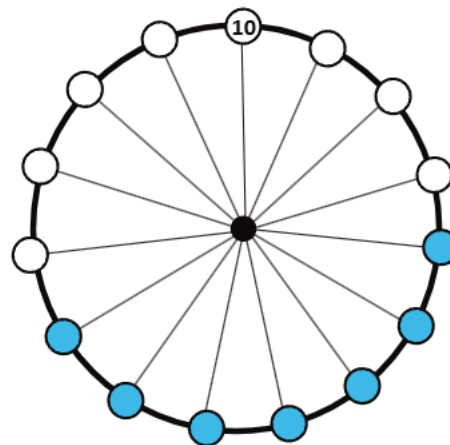
- A) 1347 B) 1011 Γ) 674 Δ) 673 Ε) κανένα από τα προηγούμενα

17) Τα πρώτα δύο ψηφία ενός αριθμού με 100 ψηφία είναι 2 και 9, όπως στην εικόνα. Πόσα ψηφία έχει το τετράγωνο αυτού του αριθμού;



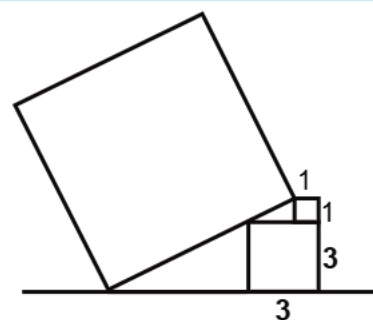
- A) 199 B) 200 Γ) 201 Δ) 202
Ε) δεν μπορούμε να ξέρουμε με βεβαιότητα

18) Στην περιφέρεια ενός μεγάλου κύκλου είναι τοποθετημένοι 15 αριθμοί, όπως στο σχήμα. Μόνο ένας αριθμός είναι τώρα ορατός, ο 10 στην κορυφή. Το άθροισμα οποιωνδήποτε 7 αριθμών σε διαδοχικές θέσεις (όπως οι 7 σημειωμένες με γαλάζιο χρώμα) είναι το ίδιο σε όλες τις περιπτώσεις. Κάποιος πρόσθεσε και τους 15 αριθμούς. Πόσοι από τους 75, 216, 365 ή 2020 θα μπορούσαν να είναι το άθροισμα που βρήκε;



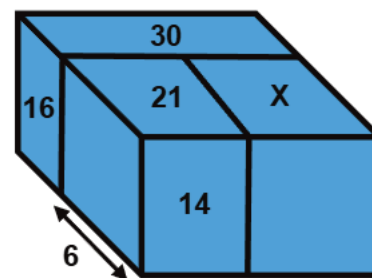
- A) κανένας B) ένας Γ) δύο
Δ) τρεις Ε) τέσσερις

19) Τρία τετράγωνα είναι τοποθετημένα όπως στην εικόνα. Μία κορυφή του μεγάλου τετραγώνου συμπίπτει με μία του μικρού. Μία κορυφή του μεσαίου τετραγώνου είναι στην κάτω πλευρά του μεγάλου. Οι πλευρές των δύο μικρότερων τετραγώνων έχουν μήκος 1 και 3. Πόσο είναι το μήκος της πλευράς του μεγάλου τετραγώνου;



- A) 7 B) 9 Γ) $4\sqrt{2}$ Δ) $5\sqrt{2}$ Ε) $4\sqrt{5}$

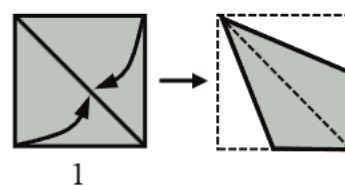
20) Με τρία ορθογώνια παραλληλεπίπεδα φτιάχνουμε ένα μεγαλύτερο, όπως στην εικόνα. Το πλάτος ενός από τα τρία είναι 6. Τα εμβαδά ορισμένων από τις έδρες τους είναι 14, 21, 16 και 30, όπως φαίνεται στο σχήμα. Πόσο είναι το εμβαδόν της έδρας σημειωμένης με X;



- A) 18 B) 24 Γ) 28 Δ) 30
Ε) δεν μπορούμε να ξέρουμε με βεβαιότητα

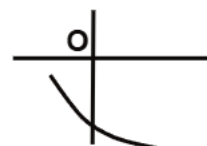
Ερωτήσεις 5 πόντων:

21) Ένας μαθητής είχε ένα φύλλο από χαρτί σε σχήμα τετραγώνου πλευράς 1. Το δίπλωσε έτσι ώστε δύο από τις πλευρές του να πέσουν πάνω στην διαγώνιο, όπως στην εικόνα. Σχηματίστηκε έτσι ένα τετράπλευρο. Πόσο είναι το εμβαδόν του τετραπλεύρου;



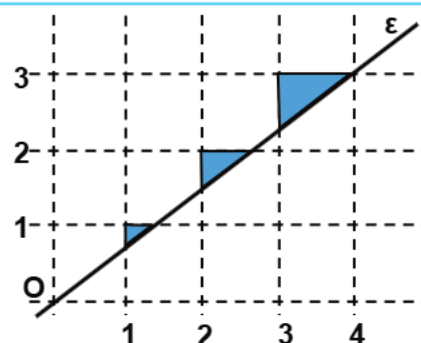
- A) $2 - \sqrt{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Γ) $\sqrt{2} - 1$ Δ) $\frac{7}{10}$ Ε) $\frac{3}{5}$

22) Το σχήμα δείχνει ένα τμήμα του γραφήματος μιας παραβολής με εξίσωση $y = ax^2 + bx + \gamma$. Ποια από τις παρακάτω ποσότητες είναι θετική;



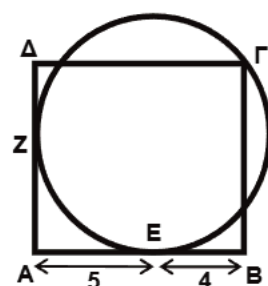
- A) γ B) $\beta + \gamma$ Γ) $a\gamma$ Δ) $\beta\gamma$ Ε) $a\beta$

23) Στο καρτεσιανό επίπεδο η ευθεία ϵ διέρχεται από την αρχή O των αξόνων. Σχηματίζονται έτσι τρία τρίγωνα (γαλάζια στο σχήμα). Αν το εμβαδόν του μικρότερου τριγώνου είναι T , ποια είναι τα εμβαδά των άλλων δύο τριγώνων;



- A) $2T$ και $3T$ B) $2T$ και $4T$ Γ) $3T$ και $9T$
 Δ) $4T$ και $8T$ Ε) κανένα από τα προηγούμενα

24) Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Ένας κύκλος διέρχεται από την κορυφή Γ και εφάπτεται σε δύο από τις πλευρές του ορθογωνίου στα σημεία E και Z , όπως στο σχήμα. Αν $AE = 5$ και $EB = 4$, πόσο είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου;



- A) 72 B) 63 Γ) 25π
 Δ) 27π Ε) κανένα από τα προηγούμενα

25) Στο τραπέζι βρίσκονται μερικά γεωμετρικά σχήματα. Κάποια είναι τετράγωνα και τα υπόλοιπα είναι τρίγωνα. Κάποια έχουν γαλάζιο χρώμα και τα υπόλοιπα κόκκινο. Κάποια έχουν μεγάλο μέγεθος και τα υπόλοιπα μικρό. Επίσης ξέρουμε ότι:

- α) αν ένα σχήμα είναι μεγάλο, τότε είναι τετράγωνο,
 β) αν ένα σχήμα είναι γαλάζιο, τότε είναι τρίγωνο.

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι **σίγουρα** σωστή;

- A) όλα τα κόκκινα σχήματα είναι τετράγωνα B) όλα τα τετράγωνα είναι μεγάλα
 Γ) όλα τα μικρά σχήματα είναι γαλάζια Δ) όλα τα τρίγωνα είναι γαλάζια
 Ε) όλα τα γαλάζια σχήματα είναι μικρά

26) Σε ένα κουτί υπάρχουν 71 μπίλιες. Ο μαθητής μπορεί είτε να αφαιρέσει 30 μπίλιες την φορά είτε να προσθέσει 18. Αν κάνει τέτοιες προσθέσεις ή αφαιρέσεις όσες φορές θέλει και με όποια σειρά θέλει, ποιος είναι ο μικρότερος δυνατός αριθμός από μπίλιες που μπορεί να μείνουν στο κουτί;

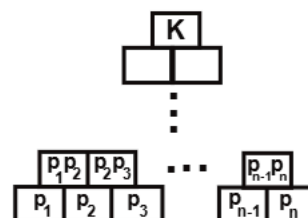
- A) 1 B) 3 Γ) 5 Δ) 7 Ε) 11

27) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι αν βάλει το σύμβολο του πολλαπλασιασμού μεταξύ του δεύτερου και του τρίτου ψηφίου του αριθμού 2020, τότε το γινόμενο 20×20 που προκύπτει είναι τέλειο τετράγωνο. Πόσοι αριθμοί από τον 2010 έως τον 2099 (συμπεριλαμβανομένου του 2020) έχουν την ίδια ιδιότητα;

- A) 1 B) 2 Γ) 3 Δ) 4 Ε) 5

28) Μία πυραμίδα αριθμών περιέχει n διαφορετικούς πρώτους αριθμούς p_1 έως p_n στην βάση της, όπως στην εικόνα. Το γινόμενο οποιωνδήποτε δύο γειτονικών αριθμών σε μία γραμμή γράφεται στο κουτάκι που είναι αμέσως από πάνω τους. Στην κορυφή υπάρχει ένας αριθμός

$K = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$. Αν $\alpha_2 = 8$, πόσοι αριθμοί στην πυραμίδα είναι πολλαπλάσια του p_4 ;

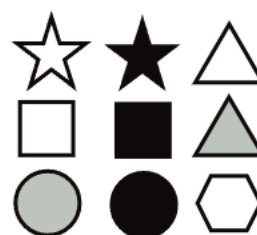


- A) 4 B) 16 Γ) 24 Δ) 28 Ε) 36

29) Ο μάστορας έχει 52 ολόγδια πλακάκια σε σχήμα ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου. Με κάποια από αυτά θέλει να πλακοστρώσει ένα τετράγωνο μπαλκόνι. Πόσα διαφορετικού μεγέθους τετράγωνα μπαλκόνια μπορεί να κατασκευάσει;

- A) 7 B) 8 Γ) 9 Δ) 10 Ε) 11

30) Μία από τις εικονιζόμενες πέτρες είναι η μαγική πέτρα του Δία. Η Αθηνά ξέρει ότι ο Δίας είπε στον Ερμή το σχήμα της πέτρας. Ο Ερμής ξέρει ότι ο Δίας είπε στην Αθηνά το χρώμα της πέτρας. Μετά ακολούθησε ο εξής διάλογος:



ΑΘΗΝΑ: Δεν ξέρω ποια είναι η μαγική πέτρα, αλλά είμαι σίγουρη ότι ούτε ο Ερμής ξέρει.

ΕΡΜΗΣ: Στην αρχή δεν ήξερα ποια ήταν η μαγική πέτρα του Δία, αλλά τώρα ξέρω.

ΑΘΗΝΑ: Τώρα και εγώ ξέρω.

Ποια είναι η μαγική πέτρα του Δία;

- A) B) Γ) Δ) Ε)