

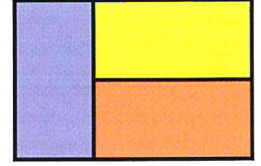
Θέματα Καγκουρό 2019

Επίπεδο: 5

(για μαθητές της Β' και Γ' τάξης Λυκείου)

Ερωτήσεις 3 πόντων:

1) Μία σημαία έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου που είναι χωρισμένο σε τρία ολόδια ορθογώνια παραλληλόγραμμα, όπως στην εικόνα. Αν η περίμετρος της σημαίας είναι 3 m, πόση είναι η περίμετρος καθενός από τα τρία μικρότερα ορθογώνια παραλληλόγραμμα;

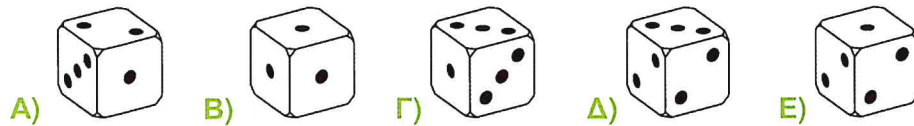


- A) 1 m B) 1,2 m Γ) 1,4 m Δ) 1,6 m Ε) 1,8 m

2) Πόσους διαιρέτες έχει ο αριθμός $2^{(2^{10})}$;

- A) $2^{(2^{10})}$ B) 1024 Γ) 1025 Δ) 2048 Ε) κανένα από τα προηγούμενα

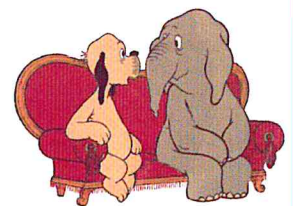
3) Κάτι περίεργα ζάρια έχουν στις έδρες τους είτε τους αριθμούς 1, 2, 3 είτε κλάσματα. Απέναντι από έδρες που περιέχουν το 1 υπάρχει το $\frac{1}{2}$, απέναντι από έδρες που περιέχουν το 2 υπάρχει το $\frac{1}{3}$ και απέναντι από έδρες που περιέχουν το 3 υπάρχει το $\frac{1}{6}$. Σε ποιο από τα παρακάτω ζάρια το άθροισμα των κλασμάτων που δεν φαίνονται είναι μεγαλύτερο;



4) Η συνταγή της γιαγιάς για λαδόξιδο χρειάζεται λάδι προς ξίδι σε αναλογία 7:1 ως προς όγκο. Αν θέλουμε να φτιάξουμε 2 λίτρα λαδόξιδο, πόσα λίτρα ξίδι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;

- A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{2}{7}$ Γ) $\frac{1}{4}$ Δ) $\frac{1}{2}$ Ε) κανένα από τα προηγούμενα

5) Αν Α το πλήθος σκύλοι ζυγίζουν Κ κιλά και αν Β το πλήθος ελέφαντες ζυγίζουν όσο Γ σκυλιά, πόσα κιλά ζυγίζει ένας ελέφαντας; (Υποθέτουμε ότι όλα τα σκυλιά έχουν το ίδιο βάρος. Το ίδιο και οι ελέφαντες).



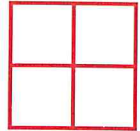
- A) ΑΒΓΚ κιλά B) $\frac{ΑΚ}{ΒΓ}$ κιλά Γ) $\frac{ΒΚ}{ΑΓ}$ κιλά Δ) $\frac{ΓΚ}{ΑΒ}$ κιλά
Ε) κανένα από τα προηγούμενα

6) Πόσοι από τους πέντε αριθμούς

α) $2018^2 + 2018$, β) $2020^2 - 2018^2$, γ) $2019 \cdot 2019$, δ) $2018^3 + 1$, ε) $2020^4 - 1$
είναι πολλαπλάσια του 2019;

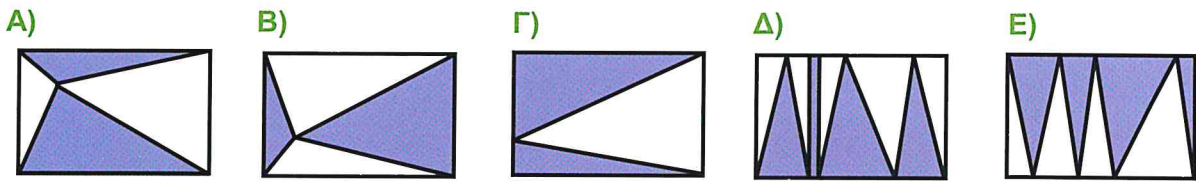
- A) ένας B) δύο Γ) τρεις Δ) τέσσερις Ε) πέντε

7) Οι αριθμοί 1, 2, 3 και 4 είναι γραμμένοι από μία φορά ο καθένας στα τετράγωνα ενός 2×2 πίνακα. Κάποιος υπολόγισε το άθροισμα των δύο αριθμών σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη του σχήματος. Δύο από τα αθροίσματα που βρήκε ήταν 4 και 5. Ποια είναι τα άλλα δύο αθροίσματα;



- A) 3 και 5 B) 4 και 5 Γ) 4 και 6 Δ) 5 και 6 Ε) 6 και 6

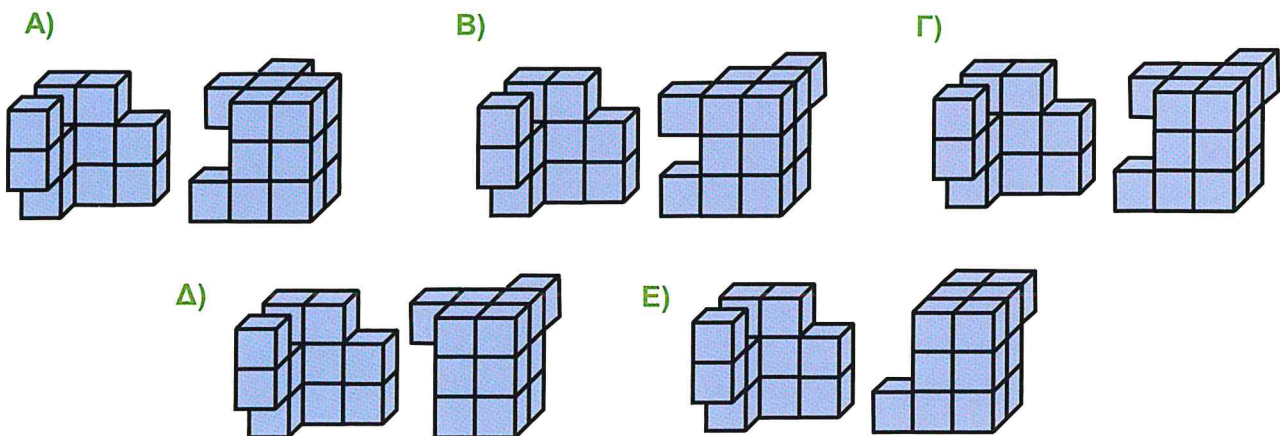
8) Έχουμε πέντε ίδια ορθογώνια παραλληλόγραμμα που έχουν εν μέρει σκιαστεί, όπως στα παρακάτω σχήματα. Σε ποια περίπτωση το σκιασμένο μέρος έχει μεγαλύτερο εμβαδόν;



9) Ποιο είναι το πρώτο (το πιο αριστερό) ψηφίο του μικρότερου φυσικού αριθμού του οποίου το άθροισμα των ψηφίων του ισούται με 2019;

- A) 2 B) 3 Γ) 4 Δ) 5 Ε) 6

10) Ένας μαραγκός έκοψε έναν $3 \times 3 \times 3$ ξύλινο κύβο σε δύο κομμάτια. Ποιο από τα παρακάτω σχήματα δείχνει τα δύο κομμάτια του κομμένου κύβου;

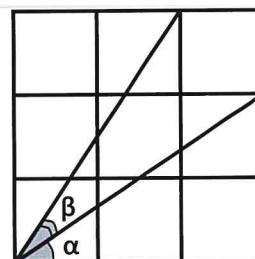


Ερωτήσεις 4 πόντων:

11) Τρία καγκουρό ζυγίζουν το καθένα έναν ακέραιο αριθμό από κιλά. Το καθένα έχει διαφορετικό βάρος από τα άλλα δύο. Το συνολικό τους βάρος είναι 97 κιλά. Ποιο είναι το μεγαλύτερο δυνατό βάρος που μπορεί να έχει το πιο ελαφρύ από τα τρία καγκουρό;

- A) 1 κιλό B) 30 κιλά Γ) 31 κιλά Δ) 32 κιλά E) 33 κιλά

12) Ένα τετράγωνο είναι χωρισμένο σε 9 ίσα μικρότερα τετράγωνα, όπως στο σχήμα. Ποιο από τα παρακάτω αληθεύει για τις σημειωμένες γωνίες α και β ;



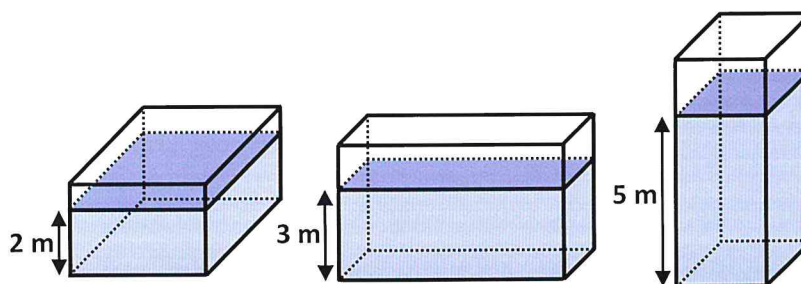
- A) $\alpha = \beta$ B) $\alpha + \beta = 45^\circ$ Γ) $\alpha + \beta = 60^\circ$
 Δ) $2\alpha + \beta = 90^\circ$ E) $\alpha + 2\beta = 90^\circ$

13) Ποια είναι η μεγαλύτερη δύναμη του 3 που διαιρεί τον αριθμό

$$(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7) + (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8) + (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) ;$$

- A) 3^2 B) 3^4 Γ) 3^5 Δ) 3^6 E) 3^7

14) Ένα ντεπόζιτο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου περιέχει 120 m^3 νερού. Η στάθμη του νερού είναι σε ύψος είτε 2 m είτε 3 m είτε 5 m από την βάση ανάλογα με ποια πλευρά του ντεπόζιτου ακουμπά στο έδαφος, όπως στο σχήμα. Ποιος είναι ο όγκος του ντεπόζιτου;



- A) 160 m^3 B) 180 m^3 Γ) 200 m^3 Δ) 220 m^3 E) 240 m^3

15) Ένα άλογο, ένας ελέφαντας και μία καμήλα έκαναν παρέα. Μια μέρα ένα από τα τρία ζώα έφαγε το γλυκό που τους έφεραν ως δώρο. Όταν ρωτήθηκαν, έδωσαν τις εξής απαντήσεις:

Άλογο: «Δεν έφαγα εγώ το γλυκό.»

Ελέφαντας: «Εγώ έφαγα το γλυκό.»

Καμήλα: «Το άλογο έφαγε το γλυκό.»

Αν ακριβώς ένα από τα τρία ζώα λείει ψέματα, ποιο ζώο έφαγε το γλυκό;

A) το άλογο

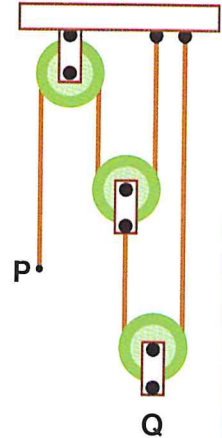
B) ο ελέφαντας

Γ) η καμήλα

Δ) είτε το άλογο είτε η καμήλα

Ε) η κατάσταση που περιγράφει το πρόβλημα είναι αδύνατη

16) Έχουμε ένα σύστημα που αποτελείται από 3 τροχαλίες. Τα σχοινιά μεταξύ των τροχαλιών είναι κατακόρυφα, όπως στην εικόνα. Αν τραβήξουμε το άκρο P κατά 24 cm προς τα κάτω, πόσα cm θα ανέβει το άκρο Q;



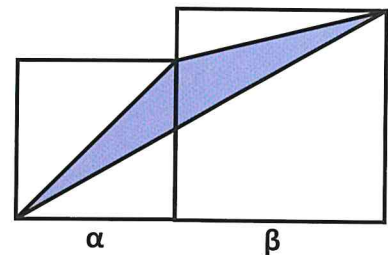
A) 24 cm B) 12 cm Γ) 8 cm

Δ) 6 cm Ε) 4,8 cm

17) Ο Διόφαντος έγραψε στον πίνακα όλους τους φυσικούς αριθμούς N οι οποίοι διαιρούν τον N+6. Πόσους αριθμούς έγραψε στον πίνακα ο Διόφαντος;

A) 2 B) 3 Γ) 4 Δ) 5 Ε) περισσότερους από 6

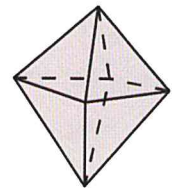
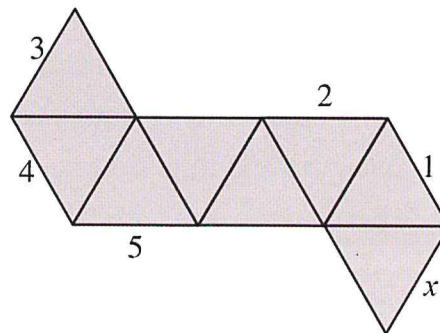
18) Δύο τετράγωνα με πλευρές α και β, όπου α<β, είναι τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο, όπως στο σχήμα. Πόσο είναι το εμβαδόν του σκιασμένου τριγώνου;



A) $\sqrt{\alpha\beta}$ B) $\frac{1}{2}\alpha^2$ Γ) $\frac{1}{2}\beta^2$

Δ) $\frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2)$ Ε) $\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$

19) Το σχήμα δείχνει το ανάπτυγμα ενός οκταέδρου. Όταν διπλωθεί το ανάπτυγμα, ποια ακμή θα συμπέσει με αυτήν που είναι σημειωμένη με x;



A) η σημειωμένη με 1

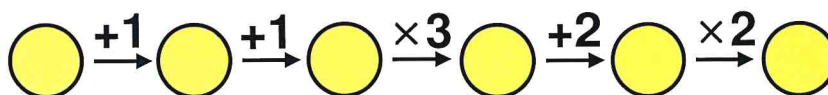
B) η σημειωμένη με 2

Γ) η σημειωμένη με 3

Δ) η σημειωμένη με 4

Ε) η σημειωμένη με 5

20) Ένας μαθητής μπορεί να γράψει οποιονδήποτε φυσικό αριθμό μέσα στον αριστερό κύκλο του σχήματος. Μετά συμπληρώνει τους υπόλοιπους κύκλους ακολουθώντας τις οδηγίες πάνω στα βελάκια. Πόσοι από τους έξι αριθμούς στους κύκλους είναι πολλαπλάσια του 3;



A) ακριβώς 1

B) ακριβώς 2

Γ) είτε 1 είτε 2, αλλά και οι δύο εκδοχές είναι πιθανές

Δ) είτε 2 είτε 3, αλλά και οι δύο εκδοχές είναι πιθανές

Ε) είτε 3 είτε 4, αλλά και οι δύο εκδοχές είναι πιθανές

Ερωτήσεις 5 πόντων:

21) Οι $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι φυσικοί αριθμοί που ικανοποιούν την σχέση $\alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 = 2\alpha\beta\gamma\delta$. Ποια από τις παρακάτω τιμές **αποκλείεται** να είναι η τιμή του γινομένου $\alpha\beta\gamma\delta$;

A) 100

B) 225

Γ) 400

Δ) 1000

Ε) 2500

22) Μεταξύ ποιων διαδοχικών φυσικών αριθμών βρίσκεται η τιμή της παράστασης

$$\sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12}}}} ;$$

A) του 3 και του 4

B) του 4 και του 5

Γ) του 5 και του 6

Δ) του 7 και του 8

Ε) του 12 και του 13

23) Για ποιες τιμές της παραμέτρου α η εξίσωση $1 - |x| = \alpha x$ έχει ακριβώς δύο ρίζες;

A) για $\alpha \in (-\infty, 1]$

B) για $\alpha \in (-1, 1)$

Γ) για $\alpha \in [1, +\infty)$

Δ) για $\alpha = 0$

Ε) για $\alpha = \pm 1$

24) Σε κάτι σκακιστικούς αγώνες κάθε ομάδα αποτελείται από 3 παίκτες. Ο κάθε παίκτης παίζει ακριβώς από μία παρτίδα με καθέναν από τους παίκτες των αντίπαλων ομάδων. Αν οι οργανωτές δεν θέλουν να παιχθούν πάνω από 150 παρτίδες, ποιος είναι ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός από ομάδες που μπορούν να λάβουν μέρος στους αγώνες αυτούς;

A) 5

B) 6

Γ) 7

Δ) 8

Ε) 9

25) Πόσα επίπεδα διέρχονται από ακριβώς τρεις κορυφές ενός κύβου;

A) 6

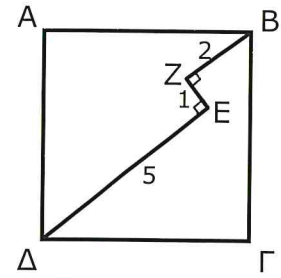
B) 8

Γ) 10

Δ) 12

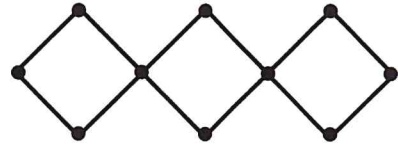
Ε) 20

26) Μέσα σε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ γράφουμε μία τεθλασμένη γραμμή ΔΕΖΒ έτσι ώστε $ΔΕ \perp ΕΖ$ και $ΕΖ \perp ΖΒ$. Αν είναι $ΔΕ = 5$, $ΕΖ = 1$ και $ΖΒ = 2$, με πόσο ισούται η πλευρά του τετραγώνου;



- A) $3\sqrt{2}$ B) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ Γ) 5 Δ) $\frac{11}{2}$ Ε) $5\sqrt{2}$

27) Στις κορυφές του σχήματος τοποθετούμε τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 10 έτσι ώστε σε κάθε κορυφή να βρίσκεται διαφορετικός αριθμός. Το άθροισμα Σ των τεσσάρων αριθμών στις κορυφές οποιαδήποτε από τα τρία τετράγωνα του σχήματος είναι το ίδιο σε όλες τις περιπτώσεις. Ποια είναι η μικρότερη δυνατή τιμή του Σ ;

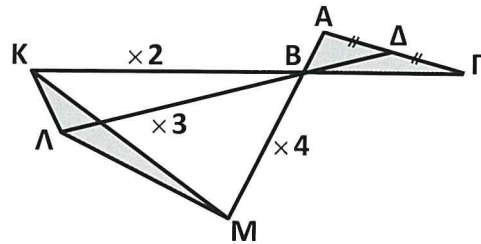


- A) 18 B) 19 Γ) 20 Δ) 21 Ε) 22

28) Ποιος είναι ο μικρότερος δυνατός αριθμός στοιχείων που πρέπει να διαγράψουμε από το σύνολο $\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$ έτσι ώστε το γινόμενο των υπόλοιπων στοιχείων του συνόλου να είναι τέλει τετράγωνο;

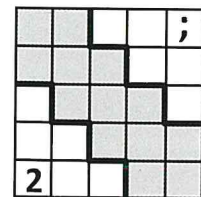
- A) 1 B) 2 Γ) 3 Δ) 4 Ε) 5

29) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εμβαδού Ε και έστω Δ το μέσον της ΑΓ. Στις ευθείες ΓΒ, ΔΒ, ΑΒ παίρνουμε σημεία Κ, Λ, Μ, αντίστοιχα, όπως στο σχήμα, έτσι ώστε $ΚΒ=2ΒΓ$, $ΛΒ=3ΒΔ$ και $ΜΒ=4ΒΑ$. Πόσο είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΚΛΜ συναρτήσεως του Ε; (Το σχήμα δεν είναι υπό κλίμακα).



- A) Ε B) $\frac{4}{3}Ε$ Γ) $\frac{3}{2}Ε$ Δ) 2Ε Ε) κανένα από τα προηγούμενα

30) Ένα 5×5 τετράγωνο έχει χωριστεί σε τρεις περιοχές, μία γκρι και δύο λευκές, όπως στο σχήμα. Σε κάθε τετράγωνο πρέπει να μπει από ένας αριθμός έτσι ώστε κάθε στήλη και κάθε γραμμή να περιέχει τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 και 5, από μία φορά τον καθένα. Επίσης πρέπει το άθροισμα των αριθμών σε κάθε μία από τις σημειωμένες περιοχές (μία γκρι και δύο λευκές) να είναι το ίδιο και στις τρεις περιπτώσεις. Ένας αριθμός είναι ήδη στην θέση του. Ποιος αριθμός πρέπει να μπει στο τετράγωνο με το ερωτηματικό;



- A) 1 B) 2 Γ) 3 Δ) 4 Ε) 5