

## Θέματα Καγκουρό 2018

Επίπεδο: 5

(για μαθητές της Β' και Γ' τάξης Λυκείου)

## Ερωτήσεις 3 πόντων:

1) Η εικόνα δείχνει το ημερολόγιο κάποιου μήνα του έτους. Δυστυχώς έπεσε μελάνι και ένα τμήμα του ημερολογίου σκεπάστηκε.

Τι μέρα πέφτει η 27η του εικονιζόμενου μήνα;

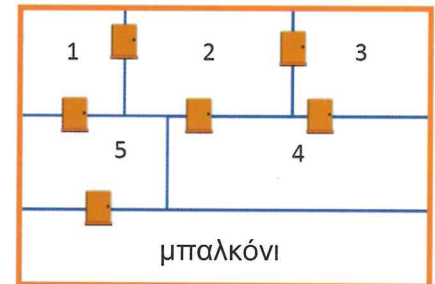
- A) Δευτέρα    B) Τετάρτη    Γ) Πέμπτη  
Δ) Σάββατο    E) Κυριακή

Δ	Τ	Τ	Π	Π	Σ	Κ
		1	2	3		

2) Ποια από τις παρακάτω αριθμητικές τιμές είναι η μεγαλύτερη;

- A)  $2 - 0 \cdot 1 + 8$     B)  $2 + 0 \cdot 1 \cdot 8$     Γ)  $2 \cdot 0 + 1 \cdot 8$     Δ)  $2 \cdot (0 + 1 + 8)$     E)  $2 \cdot 0 + 1 + 8$

3) Το σχήμα δείχνει την κάτοψη ενός διαμερίσματος. Η Αθηνά έκανε μία διαδρομή που πέρασε και από τις έξι πόρτες, ακριβώς μία φορά για την καθεμία, και κατέληξε στο μπαλκόνι. Από ποιο δωμάτιο ξεκίνησε την διαδρομή της;



- A) 1    B) 2    Γ) 3    Δ) 4    E) 5

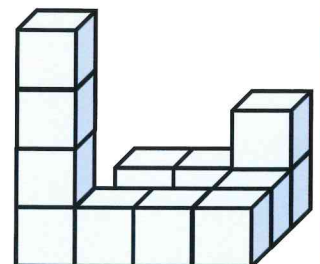
4) Ο Ήφαιστος έχει 7 πέτρες και κρατά ένα σφυρί. Κάθε φορά κτυπά με το σφυρί μία από τις πέτρες και την σπάει σε 5 μικρότερες. Συνεχίζει αυτή την δουλειά κτυπώντας κάθε φορά μία από τις πέτρες, είτε ήταν μία από τις αρχικές είτε προέκυψε με σπάσιμο. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς μπορεί να είναι το πλήθος από πέτρες που θα έχει κάποια στιγμή ο Ήφαιστος;

- A) 17    B) 20    Γ) 21    Δ) 23    E) 25

5) Μία κατασκευή αποτελείται από 12 κολλημένους κύβους, όπως στο σχήμα. Βουτάμε την κατασκευή μέσα σε έναν κουβά με μπόγιά ώστε να βαφτεί ολόκληρη η εξωτερική της επιφάνεια.

Σε πόσους από τους κύβους θα βαφτούν ακριβώς 4 από τις έδρες τους;

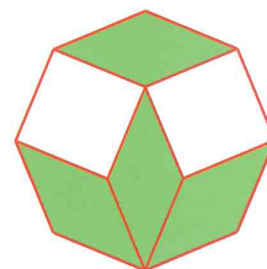
- A) 6    B) 7    Γ) 8    Δ) 9    E) 10



6) Ποια είναι η τιμή της παράστασης  $|\sqrt{17} - 5| + |\sqrt{17} + 5|$  μετά την απλοποίηση;

- A) 10      B)  $2\sqrt{17}$       Γ)  $\sqrt{34} - 10$       Δ)  $10 - \sqrt{34}$       Ε) 0

7) Για να κατασκευαστεί το κανονικό οκτάγωνο του σχήματος χρησιμοποιήθηκαν τέσσερις ίδιοι ρόμβοι και δύο ίδια τετράγωνα. Πόσες μοίρες είναι η μεγάλη γωνία του ρόμβου;



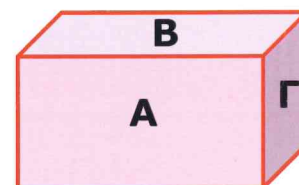
- A)  $135^\circ$       B)  $140^\circ$       Γ)  $144^\circ$       Δ)  $145^\circ$       Ε)  $150^\circ$

8) Σε ένα κουτί υπάρχουν 65 βώλοι. Οι 8 είναι λευκοί, ενώ οι υπόλοιποι είναι μαύροι. Σε κάθε κίνηση βγάζουμε από το κουτί το πολύ 5 βώλους. Δεν επιτρέπεται να επιστρέψουμε βώλους πίσω στο κουτί, αφού τους βγάλουμε.

Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός κινήσεων που πρέπει να κάνουμε ώστε να εξασφαλίσουμε ότι θα βγάλουμε τουλάχιστον έναν άσπρο βώλο;

- A) 11      B) 12      Γ) 13      Δ) 14      Ε) 15

9) Οι έδρες ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχουν εμβαδόν A, B και Γ, αντίστοιχα, όπως στο σχήμα. Ποιος είναι ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου;



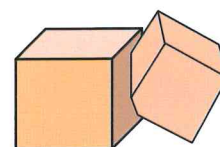
- A)  $AB\Gamma$       B)  $\sqrt{AB\Gamma}$       Γ)  $\sqrt{AB + B\Gamma + \Gamma A}$       Δ)  $\sqrt[3]{AB\Gamma}$       Ε)  $2(A + B + \Gamma)$

10) Με πόσους τρόπους μπορεί να γραφεί ο 1001 ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών; Οι γραφές  $p+q$  και  $q+p$  θεωρούνται ίδιες.

- A) κανένα      B) ένα      Γ) δύο      Δ) τρεις      Ε) περισσότερους από τρεις

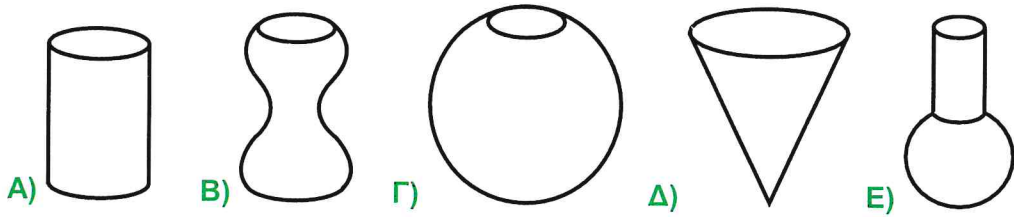
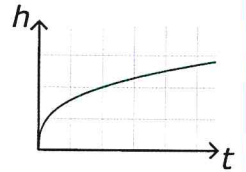
### Ερωτήσεις 4 πόντων:

11) Δύο κύβοι με όγκους V και W, αντίστοιχα, τέμνονται. Το μέρος του όγκου του V που δεν είναι κοινό στους δύο κύβους είναι το 90% του όγκου του. Το μέρος του όγκου του W που δεν είναι κοινό στους δύο κύβους είναι το 85% του όγκου του. Πώς σχετίζονται οι όγκοι V και W;



- A)  $V = \frac{2}{3}W$       B)  $V = \frac{3}{2}W$       Γ)  $V = \frac{85}{90}W$       Δ)  $V = \frac{90}{85}W$       Ε)  $V = W$

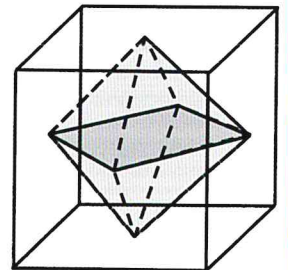
12) Ρίχνουμε νερό με σταθερή ροή σε ένα δοχείο μέχρι να γεμίσει. Το γράφημα δείχνει το ύψος  $h$  της στάθμης του νερού στο δοχείο ως συνάρτηση του χρόνου  $t$ . Ποιο από τα παρακάτω θα μπορούσε να είναι το δοχείο που χρησιμοποιούμε;



13) Πριν από λίγες μέρες ήλθαν εξωγήινοι και κατοίκησαν στον πλανήτη Άρη και στην Αφροδίτη. Οι επιστήμονες διαπίστωσαν ότι μερικοί από τους εξωγήινους έχουν πράσινο χρώμα ενώ οι υπόλοιποι έχουν κόκκινο. Επίσης διαπίστωσαν ότι όλοι οι πράσινοι εξωγήινοι ζουν στον Άρη. Ποιο από τα παρακάτω είναι το λογικό συμπέρασμα που σίγουρα είναι σωστό;

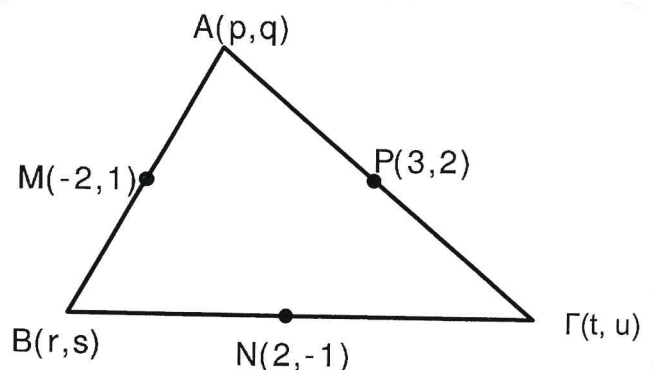
- A) κανένας κόκκινος εξωγήινος δεν ζει στον Άρη
- B) όλοι οι εξωγήινοι που ζουν στον Άρη είναι πράσινοι
- Γ) μερικοί πράσινοι εξωγήινοι ζουν στην Αφροδίτη
- Δ) όλοι οι κόκκινοι εξωγήινοι ζουν στην Αφροδίτη
- E) Στην Αφροδίτη δεν υπάρχει κανένας πράσινος εξωγήινος

14) Ένα κανονικό οκτάεδρο είναι εγγεγραμμένο σε έναν κύβο πλευράς 1. Οι κορυφές του οκταέδρου είναι τα κέντρα των εδρών του κύβου, όπως στην εικόνα. Πόσος είναι ο όγκος του οκταέδρου;



- A)  $\frac{1}{3}$
- B)  $\frac{1}{4}$
- Γ)  $\frac{1}{5}$
- Δ)  $\frac{1}{6}$
- E)  $\frac{1}{8}$

15) Οι κορυφές του τριγώνου  $AB\Gamma$  σε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων έχουν συντεταγμένες  $A(p,q)$ ,  $B(r,s)$  και  $\Gamma(t,u)$ , όπως στο σχήμα. Τα μέσα των πλευρών του τριγώνου είναι τα σημεία  $M(-2,1)$ ,  $N(2,-1)$  και  $P(3,2)$ . Ποια είναι η τιμή του αθροίσματος  $p+q+r+s+t+u$ ;



- A) 2
- B)  $\frac{5}{2}$
- Γ) 3
- Δ) 5
- E) κανένα από τα προηγούμενα

16) Ο Πυθαγόρας θέλει να χωρίσει τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, ... , 14 σε ομάδες έτσι ώστε οι αριθμοί σε κάθε ομάδα να έχουν το ίδιο άθροισμα. Ποιο είναι **το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος από ομάδες** που μπορεί να φτιάξει; Στον πίνακα φαίνεται ένα παράδειγμα με τρεις ομάδες, όπου το άθροισμα των αριθμών σε κάθε ομάδα είναι 35.

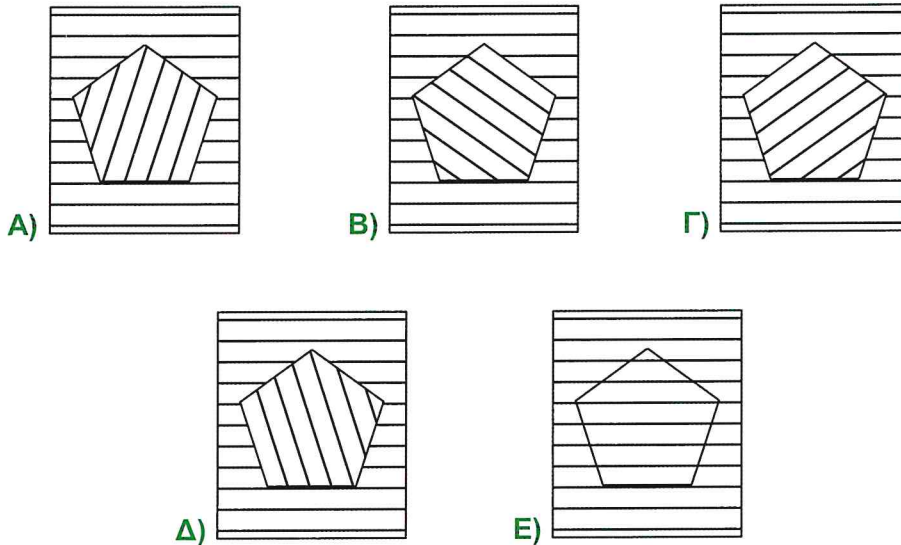
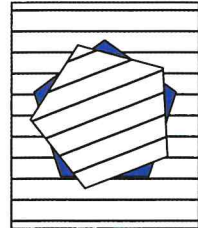
1, 3, 4, 5, 6, 7, 9

2, 10, 11, 12

8, 13, 14

- A) 2    B) 3    Γ) 5    Δ) 7    Ε) 15

17) Κόβουμε με το ψαλίδι ένα κανονικό πεντάγωνο από ένα χαρτί με γραμμές. Σε κάθε βήμα περιστρέφουμε το πεντάγωνο κατά  $21^\circ$  γύρω από το κέντρο του, με φορά την αντίθετη των δεικτών του ρολογιού. Η εικόνα δείχνει το πρώτο βήμα. Τι θα δούμε την πρώτη φορά που το πεντάγωνο ξαναχωρέσει στην τρύπα που άφησε στο χαρτί;



18) Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς **δεν** διαιρεί τον  $18^{2017} + 18^{2018}$  ;

- A) 8    B) 18    Γ) 28    Δ) 38    Ε) 48

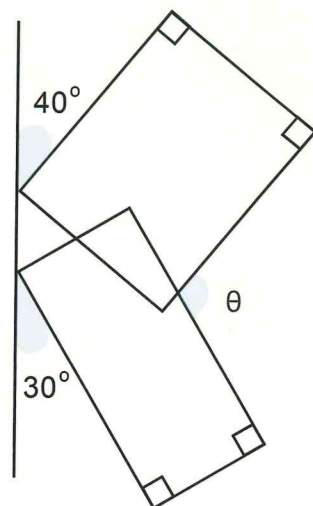
19) Ο Πυθαγόρας πήρε τρεις από τις πέντε κάρτες που εικονίζονται και πολλαπλασίασε τους αριθμούς στις κάρτες του. Η Υπατία πήρε τις υπόλοιπες δύο κάρτες και πολλαπλασίασε τους αριθμούς στις δικές της κάρτες. Στο τέλος πρόσθεσαν τα δύο γινόμενα. Το αποτέλεσμα ήταν ένας πρώτος αριθμός. Πόσο είναι το άθροισμα των αριθμών στις τρεις κάρτες του Πυθαγόρα;



- A) 12    B) 13    Γ) 15    Δ) 17    Ε) 18

20) Δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα σχηματίζουν με την κατακόρυφη ευθεία γωνίες  $40^\circ$  και  $30^\circ$ , αντίστοιχα, όπως στο σχήμα. Πόσες μοίρες είναι η σημειωμένη γωνία  $\theta$ ;

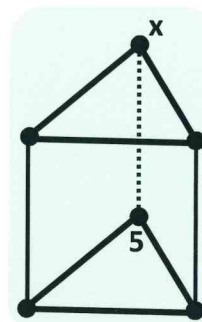
- A)  $105^\circ$    B)  $120^\circ$    Γ)  $130^\circ$    Δ)  $135^\circ$   
 E) κανένα από τα προηγούμενα



### Ερωτήσεις 5 πόντων:

21) Το πρίσμα της εικόνας αποτελείται από δύο τρίγωνα και τρία τετράγωνα. Στις κορυφές του έχουν τοποθετηθεί οι αριθμοί 1 έως 6, από μια φορά ο καθένας. Το άθροισμα των τεσσάρων αριθμών στις κορυφές καθενός από τα τετράγωνα είναι το ίδιο σε όλες τις περιπτώσεις. Ο αριθμός 5 είναι ήδη τοποθετημένος. Ποιος αριθμός υπάρχει στην κορυφή που είναι σημειωμένη με  $x$ ;

- A) 2   B) 3   Γ) 4   Δ) 6   E) δεν μπορεί να υπάρχει τέτοια κατάσταση

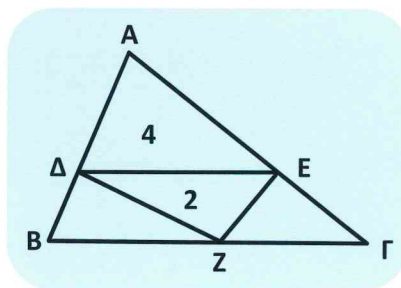


22) Αν  $\rho_1, \rho_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 - x - 2018 = 0$ , ποια είναι η τιμή της παράστασης  $\rho_1^2 + \rho_2$ ;

- A) 2016   B) 2017   Γ) 2018   Δ) 2019   E) δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι

23) Σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  φέρνουμε παράλληλη  $\Delta E$  προς την βάση και παίρνουμε ένα σημείο  $Z$  στην βάση. Αν τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $\Delta E Z$  έχουν εμβαδά 4 και 2, αντίστοιχα, πόσο είναι το εμβαδόν του  $AB\Gamma$ ;

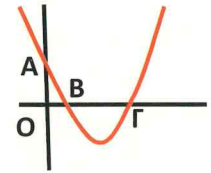
- A) 16   B) 12   Γ) 9   Δ) 8  
 E) δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι



24) Έστω  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  συνάρτηση με την ιδιότητα  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$  για κάθε φυσικούς αριθμούς  $x$  και  $y$ . Αν  $f(1) = \frac{1}{2}$ , ποια είναι η τιμή του αθροίσματος  $f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$ ;

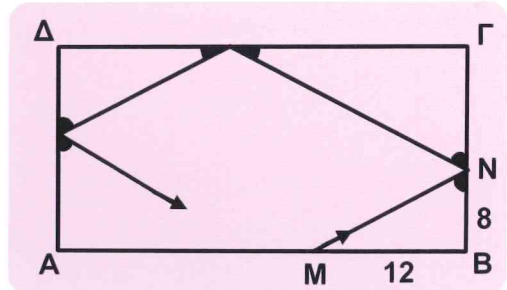
- A)  $\frac{1}{8}$    B)  $\frac{3}{2}$    Γ)  $\frac{5}{2}$    Δ)  $\frac{15}{8}$    E) 6

25) Το γράφημα της παραβολής  $y = x^2 + px + q$  τέμνει τους άξονες σε τρία σημεία A, B, Γ. Ο κύκλος που διέρχεται από τρία αυτά σημεία ξανατέμνει την παραβολή σε ένα σημείο Δ. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Δ;



- A)  $(0, -q)$     B)  $(p, q)$     Γ)  $(-p, q)$     Δ)  $\left(-\frac{p}{q}, \frac{q^2}{p^2}\right)$     E)  $(1, p+q+1)$

26) Έχουμε ένα δωμάτιο ABΓΔ ορθογωνίου σχήματος διαστάσεων 30 μ. επί 20 μ. Μία μπίλια εκσφενδονίζεται από το σημείο M της μεγάλης πλευράς του και ανακλάται διαδοχικά στους τρεις άλλους τοίχους, όπως στο σχήμα. Η γωνία πρόσπτωσης είναι κάθε φορά ίση με την γωνία ανάκλασης. Αν  $MB = 12$  μ. και  $BN = 8$  μ., σε πόση απόσταση από το A θα ξανακτυπήσει η μπίλια τον τοίχο AB;



- A) 12 μ.    B) 15 μ.    Γ) 20 μ.    Δ) 28 μ.    E) 18 μ.

27) Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση  $\left|4^x - 3\right| - 2 = 1$ ;

- A) 2    B) 3    Γ) 4    Δ) 5    E) 6

28) Τέσσερα αδέρφια που ονομάζονται A, B, Γ και Δ έχουν διαφορετικό ύψος ο καθένας. Μια μέρα είπαν:

- A: Δεν είμαι ούτε ο πιο ψηλός ούτε ο πιο κοντός.
- B: Δεν είμαι ο πιο κοντός.
- Γ: Είμαι ο πιο ψηλός.
- Δ: Είμαι ο πιο κοντός.

Αν ακριβώς ένα από τα αδέρφια λέει ψέματα, ποιος είναι ο πιο ψηλός;

- A) A    B) B    Γ) Γ    Δ) Δ    E) Δεν έχουμε αρκετές πληροφορίες

29) Οι α και β είναι φυσικοί αριθμοί με  $2^{\alpha} - 2^{\beta} = 992$ . Με πόσο ισούται το  $\alpha + \beta$ ;

- A) 15    B) 16    Γ) 17    Δ) 31    E) 32

30) Ο Αρχιμήδης υπολόγισε τι γινόμενο  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 14 \cdot 15$  των 15 πρώτων θετικών φυσικών αριθμών, και έγραψε το αποτέλεσμα σε έναν πάπυρο. Δυστυχώς έπεσε μελάνι που σκέπασε το δεύτερο και το δέκατο ψηφίο του γινομένου, όπως δείχνει η εικόνα. Ποια ψηφία σκεπάστηκαν;

1 0767436 000

- A) 2 και 0    B) 4 και 8    Γ) 7 και 4    Δ) 9 και 2    E) 3 και 8