

Θέματα Καγκουρό 2017

Επίπεδο: 5

(για μαθητές της Β' και Γ' τάξης Λυκείου)

Ερωτήσεις 3 πόντων:

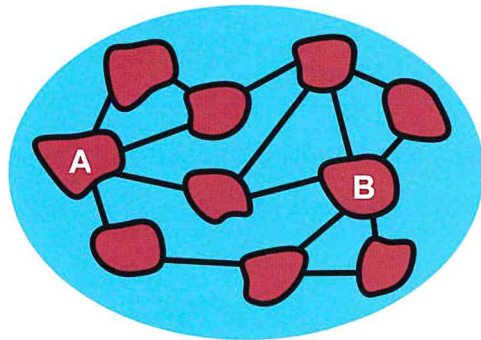
1) Ποια είναι η τιμή του $\frac{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12 \times 14 \times 16 \times 18 \times 20}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}$;

A) 402 B) 1024 Γ) 2^{20} Δ) $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$ E) κανένα από τα προηγούμενα

2) Ο Ικτίνος ζωγράφισε το σχέδιο ενός Μουσείου σε κλίμακα 1:87. Ένα άγαλμα στο σχέδιό του είχε ύψος 2 cm. Πόσο είναι το πραγματικό ύψος του αγάλματος;

A) 1,74 m B) 1,62 m Γ) 1,86 m Δ) 1,94 m E) 1,70 m

3) Ο χάρτης δείχνει μία λίμνη με 10 νησάκια που συνδέονται με 15 γέφυρες για τους πεζούς. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός από γέφυρες που πρέπει να κλείσουν για να μην μπορεί να πάει κάποιος με τα πόδια από το νησάκι A στο νησάκι B;



A) 1 B) 2 Γ) 3 Δ) 4 E) 5

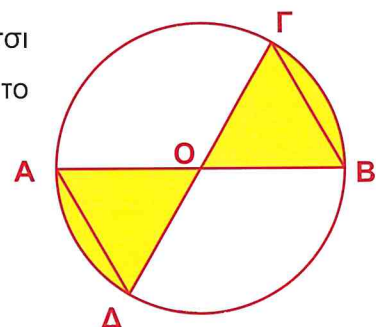
4) Δύο θετικοί αριθμοί α και β είναι τέτοιοι ώστε το 75% του α να ισούται με το 40% του β. Ποια από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστή;

A) $15\alpha = 8\beta$ B) $7\alpha = 8\beta$ Γ) $3\alpha = 2\beta$ Δ) $5\alpha = 12\beta$ E) $8\alpha = 15\beta$

5) Δύο κύλινδροι Κ και Λ έχουν ίσους όγκους. Η ακτίνα της βάσης του Λ είναι 10% μεγαλύτερη από την ακτίνα της βάσης του Κ. Κατά πόσο μεγαλύτερο είναι το ύψος του Κ από το ύψος του Λ;

A) 5% B) 10% Γ) 11% Δ) 20% E) 21%

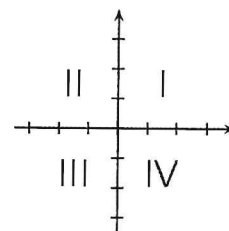
6) Σε έναν κύκλο κέντρου Ο φέρνουμε δύο διαμέτρους AB, ΓΔ έτσι ώστε να είναι $OB = B\Gamma$. Τι κλάσμα του εμβαδού του κύκλου έχει το γραμμοσκιασμένο κίτρινο χωρίο;



A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{1}{3}$ Γ) $\frac{2}{7}$ Δ) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{4}{11}$

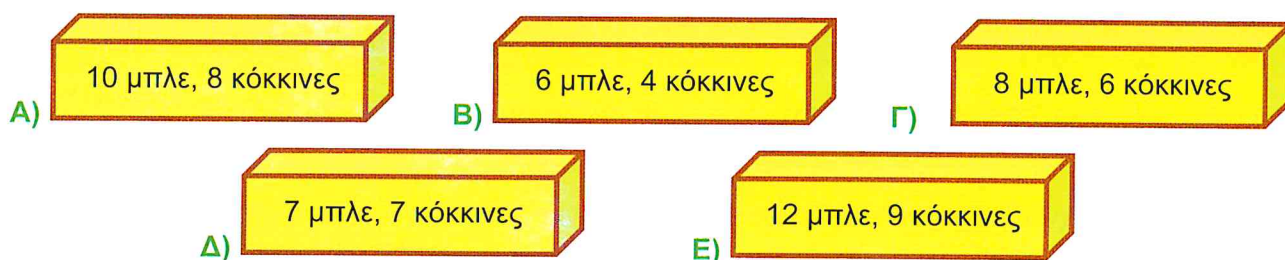
7) Ποιο τεταρτημόριο δεν περιέχει κανένα σημείο του γραφήματος της

$$f(x) = -\frac{7}{2}x + 7;$$



- A) I B) II Γ) III Δ) IV Ε) όλα περιέχουν σημεία

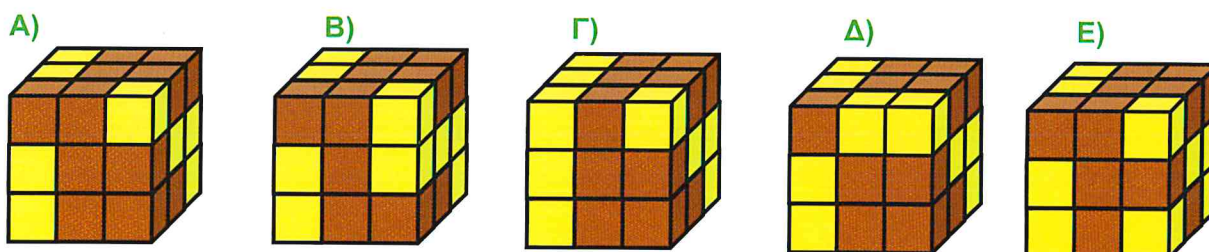
8) Καθένα από τα παρακάτω 5 κουτιά περιέχει μπλε και κόκκινες μπάλες, όπως δείχνει η σήμανση στο εξωτερικό του. Ο κ. Τυχεράκις θέλει να τραβήξει στην τύχη, χωρίς να κοιτάει το περιεχόμενο, μία μπάλα από ένα από τα κουτιά. Ποιο κουτί πρέπει να επιλέξει για να έχει την μεγαλύτερη δυνατή πιθανότητα να τραβήξει μπλε μπάλα;



9) Ποιας από τις παρακάτω πραγματικές συναρτήσεις το γράφημα έχει περισσότερα κοινά σημεία με το γράφημα της $f(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}$);

- A) $g_1(x) = x^2$ B) $g_2(x) = x^3$ Γ) $g_3(x) = x^4$ Δ) $g_4(x) = -x^4$ Ε) $g_5(x) = -x$

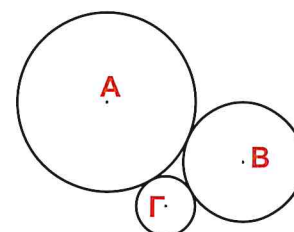
10) Ένα $3 \times 1 \times 1$ τούβλο αποτελείται από 1 κίτρινο και 2 καφέ κύβους κολλημένους όπως στην εικόνα δεξιά. Ένα από τα παρακάτω σχήματα κτίστηκε με 9 τέτοια τούβλα. Ποιο είναι αυτό που κτίστηκε;



Ερωτήσεις 4 πόντων:

11) Τρεις κύκλοι εφάπτονται ανά δύο, όπως στο σχήμα. Τα κέντρα τους είναι τα A, B, Γ και οι ακτίνες τους 3, 2, 1, αντίστοιχα. Πόσο είναι το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ;

- A) 6 B) $4\sqrt{3}$ Γ) $3\sqrt{2}$ Δ) 9 Ε) $2\sqrt{6}$

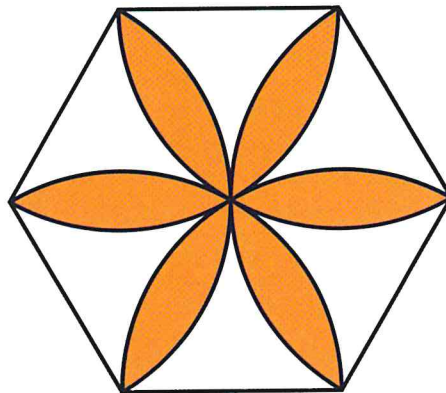


12) Ένας θετικός αριθμός p είναι μικρότερος του 1 και ένας αριθμός q είναι μεγαλύτερος του 1. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι ο μεγαλύτερος;

- A) pq B) $p+q$ Γ) $\frac{p}{q}$ Δ) $2p$ Ε) q

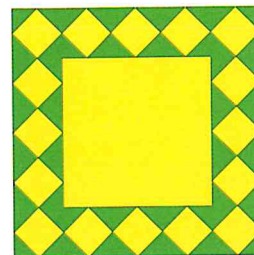
13) Η εικόνα δείχνει ένα κανονικό εξάγωνο πλευράς 1. Το σημειωμένο πορτοκαλί λουλούδι σχεδιάστηκε με κύκλους ακτίνας 1 των οποίων τα κέντρα είναι στις κορυφές του εξαγώνου. Πόσο είναι το εμβαδόν του λουλουδιού;

- A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ Γ) $2\sqrt{3} - \pi$
 Δ) $\frac{\pi}{2} + \sqrt{3}$ Ε) $2\pi - 3\sqrt{3}$

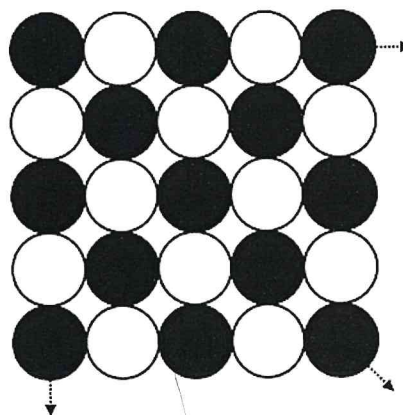


14) Ένα πάτωμα κατασκευάστηκε από τετράγωνα όπως στο μοτίβο της εικόνας. Τα μικρά κίτρινα τετράγωνα έχουν πλευρά μήκους 1 και οι πλευρές τους σχηματίζουν γωνίες 45° με τις πλευρές των δύο μεγαλύτερων τετραγώνων. Πόσο είναι το εμβαδόν της πράσινης περιοχής;

- A) 16 B) 18 Γ) 20 Δ) 22 Ε) 34



15) Μία μαθήτρια έχει 2017 στρογγυλά πούλια από τα οποία τα 1009 είναι μαύρα και τα υπόλοιπα είναι λευκά. Θέλει να φτιάξει ένα ψηφιδωτό τετράγωνου σχήματος που ξεκινά με ένα μαύρο πούλι στην πάνω αριστερή γωνία και τα πούλια να είναι τοποθετημένα εναλλάξ μαύρα, λευκά. Πόσα μαύρα και πόσα λευκά πούλια θα της περισσέψουν αν κατασκευάσει το μεγαλύτερο δυνατό τετράγωνο ψηφιδωτό που μπορεί;

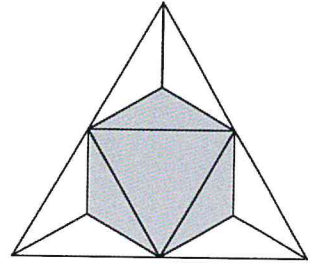


- A) Κανένα B) 40 από το κάθε χρώμα
 Γ) 40 μαύρα και 41 λευκά Δ) 41 από το κάθε χρώμα
 Ε) 41 μαύρα και 40 λευκά

16) Αν $|x| + x + y = 5$ και $x + |y| - y = 10$, με πόσο ισούται το $x + y$;

- A) 1 B) 2 Γ) 3 Δ) 4 Ε) 5

17) Από μία τριγωνική πυραμίδα (τετράεδρο) αποκόπτουμε με επίπεδα τις τέσσερις κορυφές του. Καθένα από τα τέσσερα επίπεδα διέρχεται από τα μέσα τριών γειτονικών ακμών, όπως στο σχήμα. Τι κλάσμα του όγκου της αρχικής πυραμίδας έχει το στερεό που απομένει;

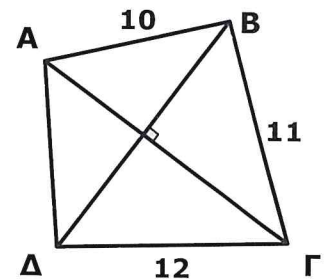


- A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{3}{4}$ Γ) $\frac{2}{3}$ Δ) $\frac{1}{2}$ Ε) $\frac{1}{3}$

18) Η περίμετρος ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι 18 και το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών του είναι 128. Πόσο είναι το εμβαδόν του τριγώνου;

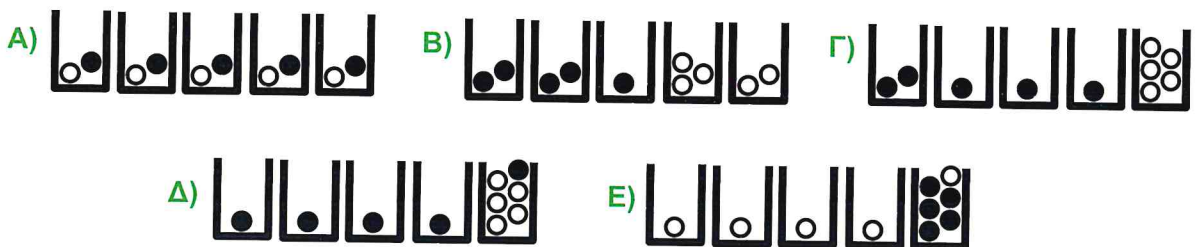
- A) 18 B) 16 Γ) 12 Δ) 10 Ε) 9

19) Ένα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει κάθετες μεταξύ τους διαγωνίους, $ΑΓ \perp ΒΔ$. Οι πλευρές του έχουν μήκη $ΑΒ=10$, $ΒΓ = 11$ και $ΓΔ = 12$ (το σχήμα δεν είναι υπό κλίμακα). Τι μήκος έχει η ΑΔ;



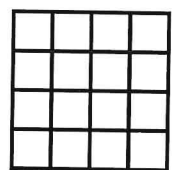
- A) 9 B) 11 Γ) $\sqrt{118}$ Δ) $\sqrt{123}$ Ε) 13

20) Έχουμε 5 δοχεία, 5 μαύρους βώλους και 5 άσπρους βώλους. Οι βώλοι είναι σκόρπιοι στα δοχεία. Διαλέγουμε στην τύχη ένα δοχείο και από αυτό διαλέγουμε στην τύχη ένα βόλο. Σε ποια από τις παρακάτω διευθετήσεις έχουμε μεγαλύτερη πιθανότητα να τραβήξουμε έναν μαύρο βόλο;



Ερωτήσεις 5 πόντων:

21) Ο χάρτης δείχνει ένα χωριό σχήματος 4×4 με 16 οικοδομικά τετράγωνα. Κάποια από τα οικοδομικά τετράγωνα είναι πάρκα. Κάθε ένα από τα υπόλοιπα οικοδομικά τετράγωνα έχει κοινή πλευρά με τουλάχιστον ένα πάρκο. Ποιος είναι ο μικρότερος δυνατός αριθμός από πάρκα που μπορεί να έχει το χωριό;



- A) 3 B) 4 Γ) 5 Δ) 6 Ε) 8

22) Πόσοι τριψήφιοι φυσικοί αριθμοί της μορφής $AB\Gamma$ (όπου βέβαια $A \neq 0$) υπάρχουν έτσι ώστε ο $(A+B)^{\Gamma}$ να είναι τριψήφιος φυσικός και συγχρόνως να είναι δύναμη του 2;

- A) 15 B) 16 Γ) 18 Δ) 20 E) 21

23) Το πολυώνυμο $5x^3 + ax^2 + bx + 24$ έχει ακέραιους συντελεστές a και b . Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς αποκλείεται να είναι ρίζα του πολυωνύμου;

- A) 1 B) -1 Γ) 3 Δ) 5 E) 6

24) Σε έναν δράκο αρέσει να λέει ψέματα κάθε τόσο. Συγκεκριμένα, κάθε τρίτη πρόταση που λέει είναι ψέματα ενώ οι υπόλοιπες είναι αλήθεια. Όταν ξεκινήσει να μιλάει, μπορεί να αρχίσει είτε με ένα ψέμα είτε με μία αληθή πρόταση είτε με δύο αληθείς προτάσεις. Μια φορά έβαλε έναν **διψήφιο αριθμό** στον νου του και έδωσε κατά σειρά τις εξής πληροφορίες:

- Ένα από τα ψηφία του είναι το 2.
- Είναι μεγαλύτερος από το 50.
- Είναι άρτιος αριθμός.
- Είναι μικρότερος από το 30.
- Είναι πολλαπλάσιο του 3.
- Ένα από τα ψηφία του είναι το 7.

Ποιο είναι το άθροισμα των ψηφίων του διψήφιου αριθμού που σκέπτεται ο δράκος;

- A) 9 B) 12 Γ) 13 Δ) 15 E) 17

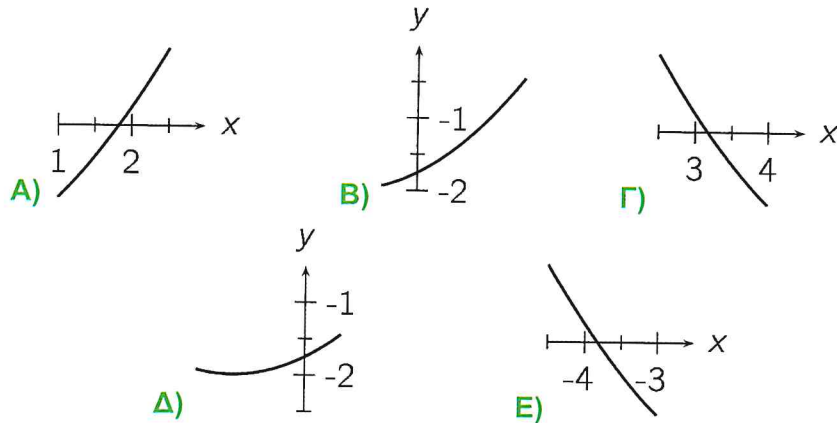
25) Πόσοι **μη μηδενικοί** φυσικοί αριθμοί υπάρχουν με την ιδιότητα: Αν διαγράψουμε το ψηφίο των μονάδων του τότε αυτό που απομένει είναι το $\frac{1}{14}$ του αρχικού αριθμού.

- A) κανένας B) 1 Γ) 2 Δ) 3 E) 4

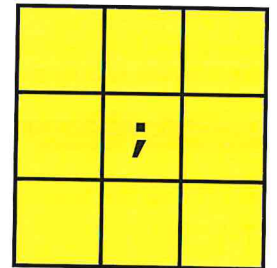
26) Μία συνάρτηση f ορίζεται στους μη μηδενικούς φυσικούς και οι τιμές της $f(1), f(2), f(3), \dots$ ικανοποιούν $f(1) = 2017, f(2) = \frac{f(1)-1}{f(1)}$ και, γενικότερα, κάθε επόμενος ικανοποιεί ως προς τον προηγούμενό του την σχέση $f(v+1) = \frac{f(v)-1}{f(v)}$. Ποια είναι η τιμή του $f(1000)$;

- A) -2007 B) $\frac{-1}{2016}$ Γ) $\frac{2016}{2017}$ Δ) 1 E) 2017

27) Τέσσερις από τις παρακάτω πέντε εικόνες δείχνουν ένα τμήμα της γραφικής παράστασης μιας (της ίδιας κάθε φορά) δευτεροβάθμιας πολυωνυμικής συνάρτησης, ενώ η πέμπτη δείχνει άλλη συνάρτηση. Ποια εικόνα δείχνει την γραφική παράσταση της άλλης συνάρτησης;



28) Στα τετράγωνα ενός 3×3 πίνακα είναι γραμμένοι 9 φυσικοί αριθμοί. Το άθροισμά των 9 αυτών αριθμών είναι 500. Οποιοιδήποτε δύο αριθμοί σε γειτονικά τετράγωνα του πίνακα διαφέρουν κατά μία μονάδα. (Γειτονικά ονομάζονται τα τετράγωνα που έχουν μία κοινή πλευρά). Ποιος αριθμός είναι γραμμένος στο κεντρικό τετράγωνο;

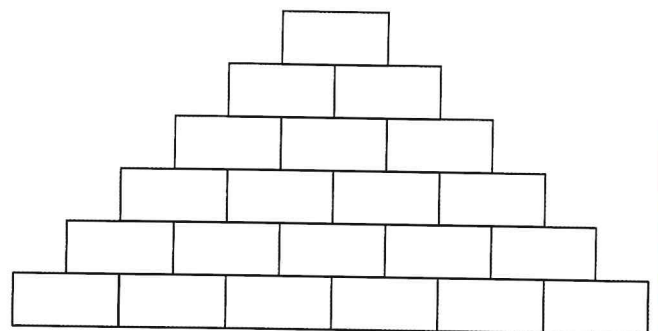


- A) 50 B) 54 Γ) 55 Δ) 56 E) 57

29) Δύο διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί είναι γραμμένοι στον πίνακα. Το άθροισμα των ψηφίων καθενός, χωριστά, είναι πολλαπλάσιο του 7. Πόσα τουλάχιστον ψηφία έχει ο μικρότερος από τους δύο αριθμούς στον πίνακα;

- A) 3 B) 4 Γ) 5 Δ) 6 E) 7

30) Ο Αρχιμήδης θέλει να γράψει φυσικούς αριθμούς στα 21 κουτάκια του σχήματος έτσι ώστε ο καθένας να είναι ίσος με το άθροισμα των δύο αριθμών στα κουτάκια στα οποία πατάει (δηλαδή στα δύο κουτάκια που βρίσκονται αμέσως από κάτω του). Ποιο είναι ο μεγαλύτερο δυνατό πλήθος από περιττούς αριθμούς που μπορεί να γράψει;



- A) 13 B) 14 Γ) 15 Δ) 16 E) 17