

## Θέματα Καγκουρό 2016

Επίπεδο: 5

(για μαθητές της Β' και Γ' τάξης Λυκείου)

## Ερωτήσεις 3 πόντων:

1) Το άθροισμα των ηλικιών του Αντώνη και του Βασίλη είναι 23, το άθροισμα των ηλικιών του Βασίλη και του Γιάννη είναι 24 και το άθροισμα των ηλικιών του Γιάννη και του Αντώνη είναι 25. Πόσο χρονών είναι ο πιο μεγάλος από τους τρεις;

Α) 10

Β) 11

Γ) 12

Δ) 13

Ε) 14

2) Με πόσο ισούται το άθροισμα  $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$ ;

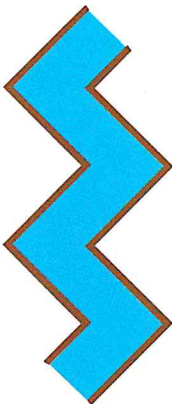
Α)  $\frac{3}{111}$ Β)  $\frac{111}{1110}$ Γ)  $\frac{111}{1000}$ Δ)  $\frac{3}{1000}$ Ε)  $\frac{3}{1110}$ 

3) Ο Ανθέμιος θέλει να κτίσει μία γέφυρα στο ποτάμι της πόλης που μένει. Ξέρει ότι από κάθε σημείο της όχθης του ποταμού, η μικρότερη δυνατή γέφυρα που μπορεί να κτίσει έχει το ίδιο μήκος, όποιο και αν είναι το σημείο. Ποια από τις παρακάτω εικόνες **δεν** είναι το ποτάμι στην πόλη του Ανθέμιου;

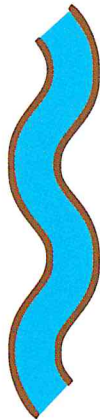
Α)



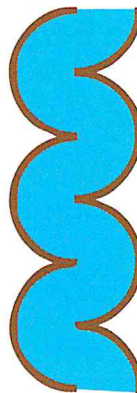
Β)



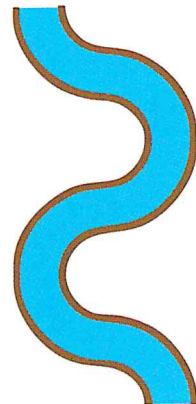
Γ)



Δ)



Ε)



4) Πόσοι ακέραιοι υπάρχουν οι οποίοι είναι μεγαλύτεροι του  $2015 \cdot 2017$  και μικρότεροι του  $2016 \cdot 2016$ ;

Α) κανένας

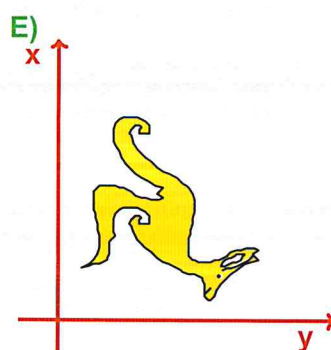
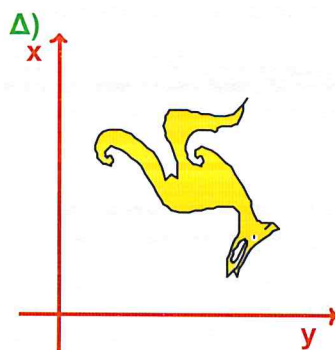
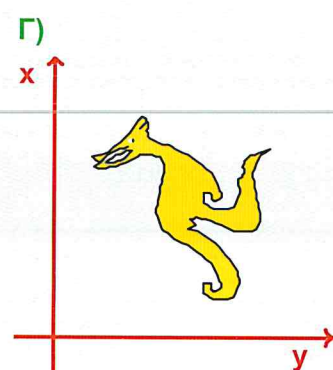
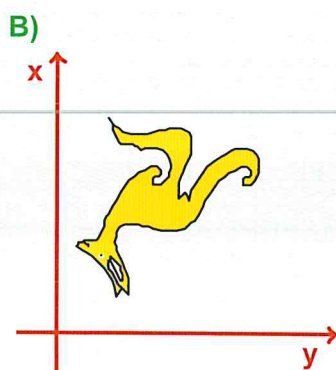
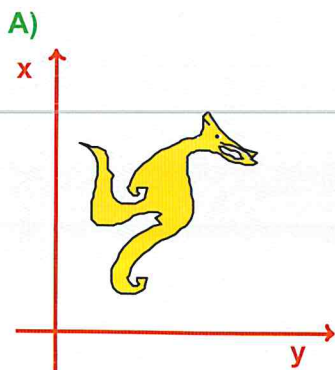
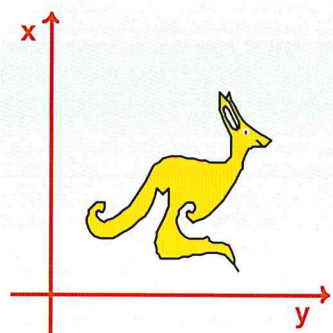
Β) 1

Γ) 2015

Δ) 2016

Ε) 2017

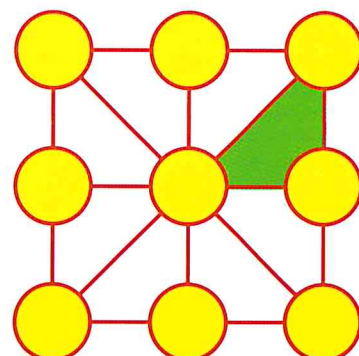
5) Ένα σύνολο σημείων σχηματίζει την εικόνα ενός καγκουρό στο σύστημα συντεταγμένων  $xy$ . Αν αντικαταστήσουμε κάθε σημείο  $(x,y)$  της εικόνας με το  $(y,x)$ , τι σχήμα θα προκύψει;



6) Οι  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  είναι θετικοί αριθμοί με  $\alpha + 2 = \beta - 2 = 2\gamma = \frac{\delta}{2}$ . Ποιος από τους τέσσερις είναι ο μεγαλύτερος;

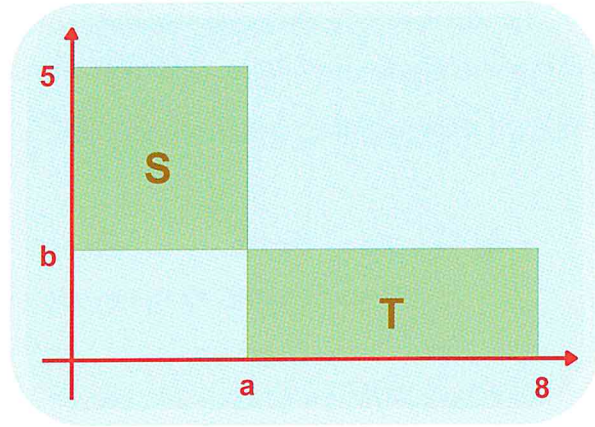
- A)  $\alpha$     B)  $\beta$     Γ)  $\gamma$     Δ)  $\delta$     Ε) δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι

7) Η Υπατία θέλει να γράψει από έναν αριθμό στους εννέα κύκλους στο εικονιζόμενο διάγραμμα. Θέλει το άθροισμα των τριών αριθμών στις κορυφές καθενός από τα οκτώ τρίγωνα που σχηματίζονται από κύκλους που συνδέονται με ακμές (όπως για παράδειγμα το πράσινο), να είναι το ίδιο σε όλες τις περιπτώσεις. Ποιο είναι το μεγαλύτερο πλήθος από διαφορετικούς αριθμούς που μπορεί να χρησιμοποιήσει;



- A) 1    B) 2    Γ) 3    Δ) 5    Ε) 8

8) Τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα S και T στο εικονιζόμενο καρτεσιανό σύστημα έχουν ίσα εμβαδά. Η μία κορυφή τους είναι η  $(8, 0)$  και η  $(0, 5)$ , αντίστοιχα. Με πόσο ισούται ο λόγος  $\frac{a}{b}$ .

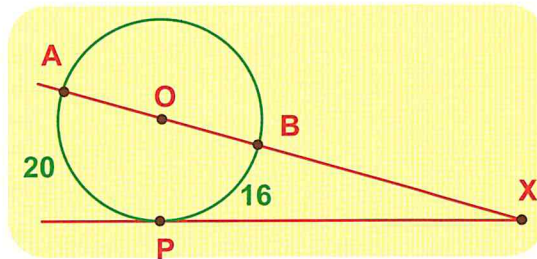


- A) 1    B)  $\frac{3}{2}$     Γ)  $\frac{4}{3}$     Δ)  $\frac{7}{4}$     Ε)  $\frac{8}{5}$

9) Αν  $x^2 - 4x + 2 = 0$ , ποια είναι η τιμή της παράστασης  $x + \frac{2}{x}$ ;

- A) -4    B) -2    Γ) 0    Δ) 2    Ε) 4

10) Το O είναι το κέντρο του κύκλου, η XP είναι εφαπτομένη στον κύκλο και τα ελάσσονα τόξα  $\widehat{AP}$ ,  $\widehat{BP}$  έχουν μήκος 20 και 16, αντίστοιχα. Πόσες μοίρες είναι η γωνία  $\widehat{AXP}$ ;



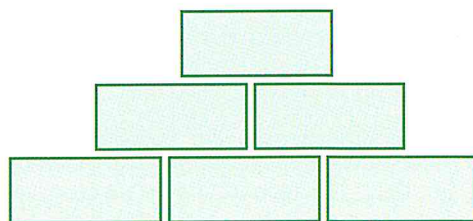
- A)  $30^\circ$     B)  $24^\circ$     Γ)  $18^\circ$     Δ)  $15^\circ$     Ε)  $10^\circ$

Ερωτήσεις 4 πόντων:

11) Ορίζουμε  $x_1 = 2$ . Μετά θέτουμε  $x_2 = x_1^{x_1}$ , κατόπιν  $x_3 = x_2^{x_2}$  και  $x_4 = x_3^{x_3}$ . Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς ισούται με τον  $x_4$ ;

- A)  $2^{(2^3)}$     B)  $2^{(2^4)}$     Γ)  $2^{(2^{11})}$     Δ)  $2^{(2^{16})}$     Ε)  $2^{(2^{768})}$

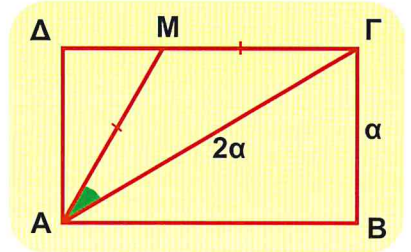
12) Στα ορθογώνια παραλληλόγραμμα της πυραμίδας (βλέπε την εικόνα) υπάρχει από ένας φυσικός αριθμός μεγαλύτερος της μονάδας. Ο αριθμός σε καθένα από τα τρία επάνω ορθογώνια είναι ίσος με το γινόμενο των αριθμών στα δύο ορθογώνια αμέσως από κάτω του (στα δύο που πατάει).



Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς αποκλείεται να είναι ο αριθμός στο ορθογώνιο της κορυφής;

- A) 56    B) 84    Γ) 90    Δ) 105    Ε) 220

13) Το  $ABΓΔ$  είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με  $AΓ = 2BΓ$ . Το  $M$  είναι σημείο στην  $ΓΔ$  με  $AM = MΓ$  (το σχέδιο δεν είναι υπό κλίμακα). Πόσες μοίρες είναι η γωνία  $\widehat{MAG}$ ;



- A)  $12^\circ$       B)  $15^\circ$       Γ)  $22,5^\circ$       Δ)  $45^\circ$   
 E) κανένα από τα προηγούμενα

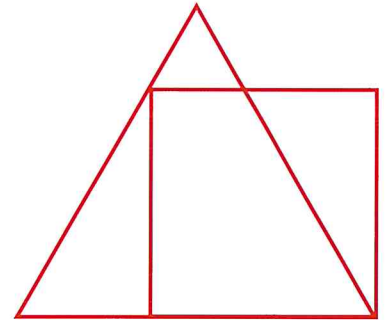
14) Η Αθηνά θέλει να ζωγραφίσει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 2016 το οποίο μετά θέλει να το κόψει σε 56 ίσα τετράγωνα. Πόσα διαφορετικά τέτοια ορθογώνια παραλληλόγραμμο μπορεί να ζωγραφίσει;

- A) 2      B) 4      Γ) 6      Δ) 8      E) κανένα

15) Ένας φυσικός αριθμός  $N$  αφήνει υπόλοιπο 5 όταν διαιρεθεί με το 6. Τι υπόλοιπο αφήνει ο  $2^{30} \cdot 3^{20} + N^2$  όταν διαιρεθεί με το 12;

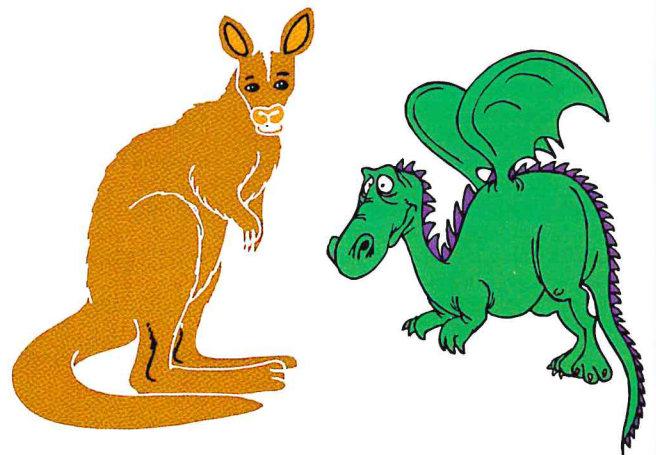
- A) 1      B) 3      Γ) 4      Δ) 13      E) κανένα από τα προηγούμενα

16) Ένα τετράγωνο έχει κοινή κορυφή με ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Μία δεύτερη κορυφή του είναι πάνω σε πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου, όπως στο σχήμα. Αν η περίμετρος του τετραγώνου είναι 4, πόση είναι η περίμετρος του ισοπλεύρου τριγώνου;



- A) 4      B)  $3 + \sqrt{3}$       Γ) 3  
 Δ)  $3 + \sqrt{2}$       E)  $4 + \sqrt{3}$

17) Σε ένα νησί ζουν Καγκουρό και Δράκοι. Τα Καγκουρό λένε πάντα την αλήθεια και οι Δράκοι λένε πάντα ψέματα. Μια μέρα ένας ταξιδιώτης συνάντησε 7 από αυτά τα ζώα, που καθόντουσαν σε ένα κυκλικό τραπέζι. Το καθένα από τα επτά ισχυρίστηκε ότι κάθεται δίπλα σε δύο Δράκους. Πόσα από τα επτά ζώα είναι Δράκοι;

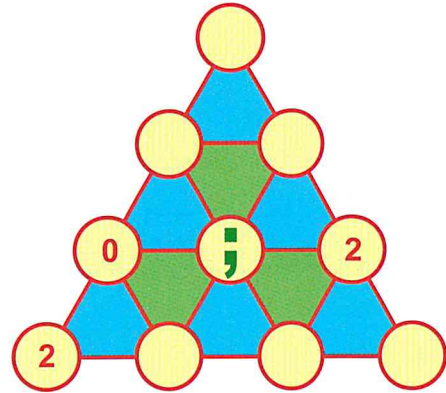


- A) 3      B) 4  
 Γ) 5      Δ) 6  
 E) δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι.

18) Οι εξισώσεις  $x^2 + ax + b = 0$  και  $x^2 + bx + a = 0$ , όπου  $a \neq b$ , έχουν και οι δύο πραγματικές ρίζες. Αν το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της πρώτης εξίσωσης ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της δεύτερης εξίσωσης, με πόσο ισούται η ποσότητα  $a+b$ ;

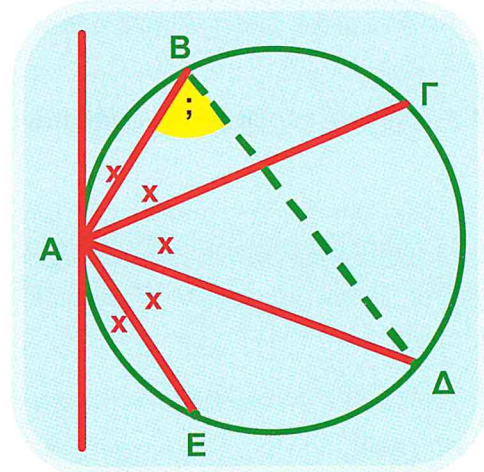
- A) 0    B) -2    Γ) 4    Δ) -4    E) δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι

19) Σε καθένα από τα δέκα κυκλάκια του σχήματος είναι σημειωμένος ο αριθμός 0 ή 1 ή 2. Το άθροισμα των αριθμών στις κορυφές οποιουδήποτε γαλάζιου τριγώνου είναι πολλαπλάσιο του 3 ενώ, αντίθετα, το άθροισμα των αριθμών στις κορυφές οποιουδήποτε πράσινου τριγώνου δεν είναι πολλαπλάσιο του 3. Τρεις αριθμοί είναι ήδη σημειωμένοι στο σχήμα. Ποιοι αριθμοί μπορούν να τοποθετηθούν στο κεντρικό κυκλάκι με το ερωτηματικό;



- A) μόνο το 0    B) μόνο το 1    Γ) μόνο το 2  
 Δ) μόνο οι 0 και 1    E) οποιοσδήποτε από τους 0 ή 1 ή 2

20) Δίνονται πέντε σημεία A, B, Γ, Δ και E σε έναν κύκλο καθώς και η εφαπτομένη του κύκλου στο A. Οι πέντε γωνίες σημειωμένες με x είναι ίσες μεταξύ τους (το σχήμα δεν είναι υπό κλίμακα). Πόσες μοίρες είναι η γωνία  $\widehat{AB\Delta}$ ;



- A)  $66^\circ$     B)  $70,5^\circ$     Γ)  $72^\circ$   
 Δ)  $75^\circ$     E)  $75,5^\circ$

### Ερωτήσεις 5 πόντων:

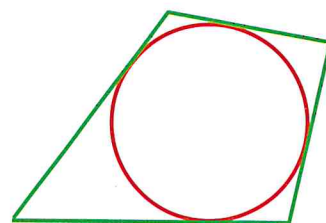
21) Οι αριθμοί 1, 5, 8, 9, 10, 12 και 15 χωρίζονται σε ξένες ανά δύο ομάδες με τουλάχιστον έναν αριθμό στην κάθε ομάδα. Το άθροισμα των αριθμών σε κάθε ομάδα είναι το ίδιο. Ποιο είναι το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος ομάδων που μπορούμε να έχουμε;

- A) 2    B) 3    Γ) 4    Δ) 5    E) 6

22) Πόσες διαφορετικές πραγματικές ρίζες έχει η εξίσωση  $(x^2 - 4x + 5)^{x^2+x-30} = 1$ ;

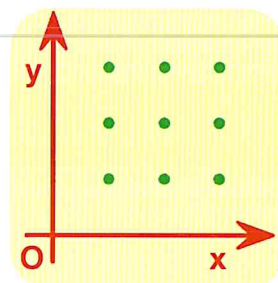
- A) 1    B) 2    Γ) 3    Δ) 4    E) άπειρες

23) Ένας κύκλος είναι εγγεγραμμένος σε ένα τετράπλευρο (οι πλευρές του εφάπτονται του κύκλου). Ο λόγος της περιμέτρου του τετραπλεύρου προς την περίμετρο του κύκλου είναι  $\frac{4}{3}$ . Ποιος είναι ο λόγος του εμβαδού του τετραπλεύρου προς το εμβαδόν του κύκλου;



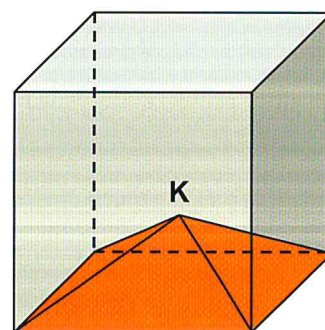
- A)  $\frac{4}{\pi}$       B)  $\frac{3\sqrt{2}}{\pi}$       Γ)  $\frac{16}{9}$       Δ)  $\frac{\pi}{3}$       Ε)  $\frac{4}{3}$

24) Πόσα διαφορετικές δευτεροβάθμιες πολυωνυμικές συναρτήσεις του  $x$  υπάρχουν των οποίων το γράφημα διέρχεται από (ακριβώς) τρία από τα σημειωμένα εννέα σημεία;



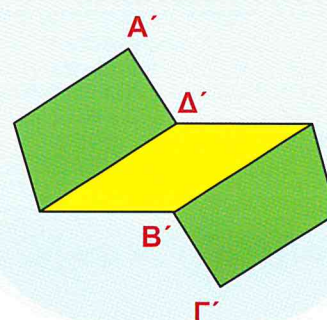
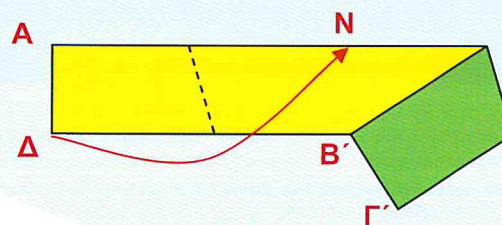
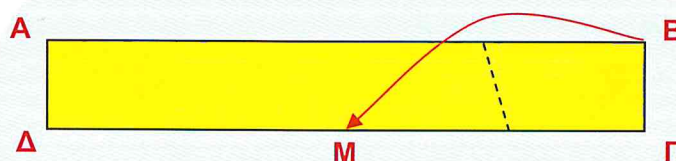
- A) 6      B) 15      Γ) 19      Δ) 22      Ε) 27

25) Χωρίζουμε έναν κύβο σε 6 πυραμίδες ενώνοντας ένα σημείο στο εσωτερικό του κύβου με τις κορυφές του. Στο σχήμα φαίνεται μία από αυτές τις πυραμίδες. Οι όγκοι των πέντε από τις έξι πυραμίδες είναι 2, 5, 10, 11 και 14. Ποιος είναι ο όγκος της έκτης πυραμίδας;



- A) 1      B) 4      Γ) 6      Δ) 9      Ε) 12

26) Μία χάρτινη λουρίδα  $AB\Gamma\Delta$  έχει πλάτος 5 cm και μήκος 50 cm. Είναι κίτρινη από την μία πλευρά και πράσινη από την άλλη. Διπλώνουμε το χαρτί έτσι ώστε η κορυφή  $B$  να συμπίψει με το μέσον  $M$  της πλευράς  $\Gamma\Delta$ . Το ξαναδιπλώνουμε ώστε η κορυφή  $\Delta$  να συμπίψει με το μέσον  $N$  της πλευράς  $AB$ . Πόσο είναι το εμβαδόν του ορατού κίτρινου τμήματος του χαρτιού, στην τελευταία εικόνα;



- A)  $50 \text{ cm}^2$       B)  $60 \text{ cm}^2$   
 Γ)  $62,5 \text{ cm}^2$       Δ)  $100 \text{ cm}^2$   
 Ε)  $125 \text{ cm}^2$

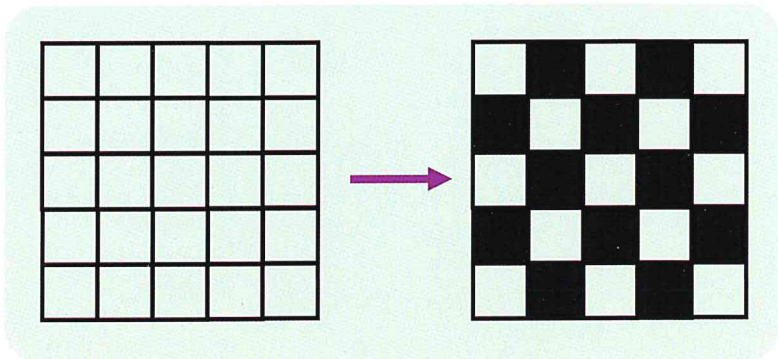
27) Με τα ψηφία 1 έως 9, από μία φορά το καθένα, σχηματίζουμε τρεις τριψήφιους αριθμούς. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς αποκλείεται να είναι το άθροισμα των τριών αυτών τριψήφιων;

- A) 1500      B) 1503      Γ) 1512      Δ) 1521      E) 1575

28) Ο Πυθαγόρας διάλεξε έναν θετικό ακέραιο  $N$  και μετά έγραψε το άθροισμα όλων των φυσικών αριθμών από το 1 έως το  $N$ . Ένας πρώτος αριθμός  $p$  διαιρεί το άθροισμα αυτό αλλά δεν διαιρεί κανέναν από τους προσθετέους του. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς αποκλείεται να είναι ίσος με το άθροισμα  $N + p$ ;

- A) 141      B) 145      Γ) 153      Δ) 157      E) 165

29) Ένα  $5 \times 5$  τετράγωνο είναι χωρισμένο σε 25 κελιά. Στην αρχή όλα τα κελιά είναι λευκά, όπως στο αριστερό μέρος της εικόνας. Σε κάθε κίνηση αλλάζουμε το χρώμα σε οποιαδήποτε τρία συνεχόμενα κελιά, είτε οριζοντίως είτε καθέτως (αλλά όχι διαγωνίως), στο αντίθετο χρώμα: Τα λευκά κελιά γίνονται μαύρα και τα μαύρα γίνονται λευκά. Ποιος είναι ο μικρότερος δυνατός αριθμός κινήσεων που χρειάζονται για να γίνει το τετράγωνο σαν την σκακίερα στο δεξί μέρος της εικόνας;



- A) λιγότερα από 8      B) 8      Γ) 9  
 Δ) περισσότερα από 10      E) η μετατροπή είναι αδύνατη

30) Ένας φυσικός αριθμός  $N$  έχει ακριβώς έξι διαφορετικούς διαιρέτες, συμπεριλαμβανομένου του 1 και του  $N$ . Το γινόμενο των πέντε από αυτούς τους διαιρέτες ισούται με 648. Ποιος είναι ο έκτος διαιρέτης του  $N$ ;

- A) 4      B) 8      Γ) 9      Δ) 12      E) 24

