

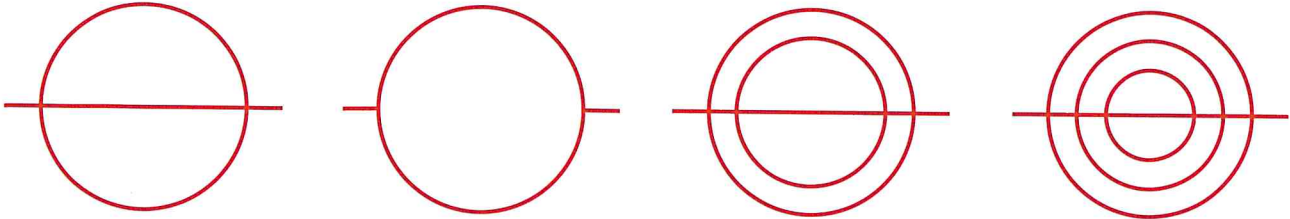
Θέματα Καγκουρό 2015

Επίπεδο: 5

(για μαθητές της Β' και Γ' τάξης Λυκείου)

Ερωτήσεις 3 πόντων:

1) Πόσα από τα παρακάτω σχήματα μπορούν να σχεδιαστούν με μία συνεχή γραμμή (μονοκοκτυλιά) που δεν περνάει δύο φορές από κανένα ευθύγραμμο ή καμπυλόγραμμο τμήμα;



Α) κανένα

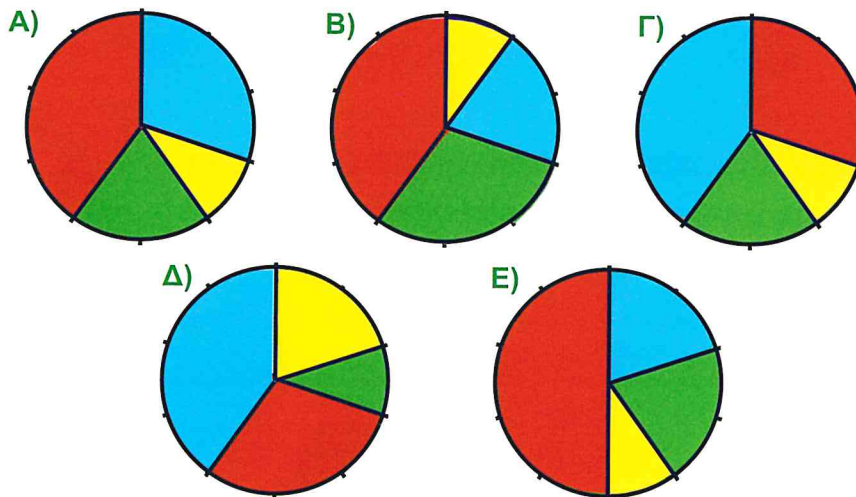
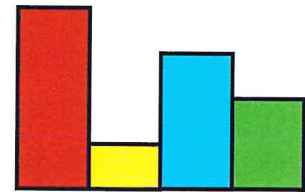
Β) ένα

Γ) δύο

Δ) τρία

Ε) τέσσερα

2) Ένας ζωγράφος διακόσμησε έναν τοίχο χρησιμοποιώντας μπογιές τεσσάρων χρωμάτων. Το σχέδιο που έφτιαξε φαίνεται δεξιά. Αν ήθελε να διακοσμήσει ένα στρογγυλό παρτέρι χρησιμοποιώντας ακριβώς τις ίδιες ποσότητες μπογιάς, ποιο από τα παρακάτω σχέδια θα μπορούσε να είναι αυτό που θα έφτιαχνε;



3) Με πόσο ισούται η παράσταση $(\alpha - \beta)^5 + (\beta - \alpha)^5$;

Α) 0

Β) $2(\alpha - \beta)^5$ Γ) $2\alpha^5 - 2\beta^5$ Δ) $2\alpha^5 + 2\beta^5$ Ε) $2\alpha^5 + 10\alpha^4\beta + 20\alpha^3\beta^2 + 20\alpha^2\beta^3 + 10\alpha\beta^4 + 2\beta^5$

4) Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $2^{2x} = 4^{x+1}$;

Α) καμία

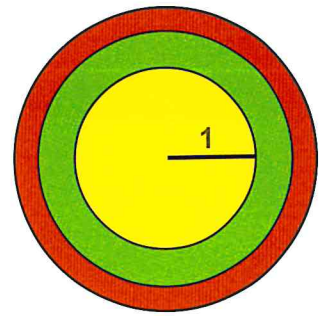
Β) μία

Γ) δύο

Δ) τρεις

Ε) άπειρες

5) Η εικόνα δείχνει τρεις ομόκεντρους κύκλους. Οι τρεις έγχρωμες περιοχές (δηλαδή ο κίτρινος κυκλικός δίσκος, ο πράσινος δακτύλιος και ο κόκκινος δακτύλιος) έχουν ίσα εμβαδά. Αν ο εσωτερικός κύκλος έχει ακτίνα 1, πόση είναι η ακτίνα του εξωτερικού μεγάλου κύκλου;

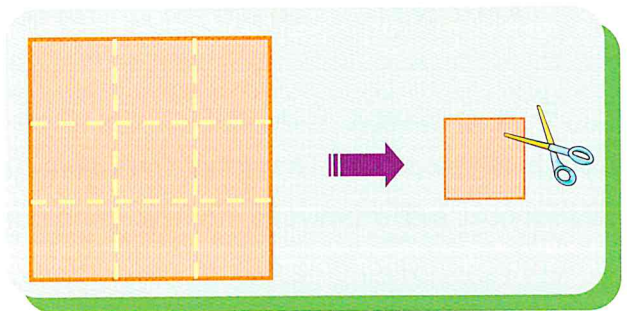


- A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ Γ) $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ Δ) 2 Ε) $3\sqrt{2}$

6) Πόσα ψηφία έχει ο αριθμός $2^{2015} \cdot 3 \cdot 5^{2012}$ στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, μετά τις πράξεις;

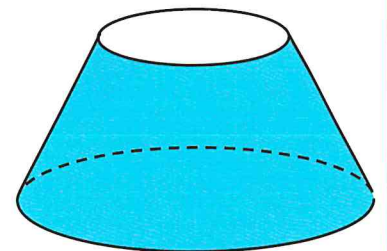
- A) 2012 B) 2013 Γ) 2014 Δ) 2015 Ε) 4027

7) Ένα τετράγωνο κομμάτι χαρτί διπλώνεται κατά μήκος των διακεκομμένων γραμμών (βλέπε σχήμα) με σκοπό να σχηματιστεί ένα μικρό τετράγωνο. Οι διπλώσεις γίνονται με οποιαδήποτε σειρά. Μετά κόβουμε με το ψαλίδι μία γωνία του διπλωμένου χαρτιού. Πόσες τρύπες θα έχει το χαρτί όταν ξεδιπλωθεί;

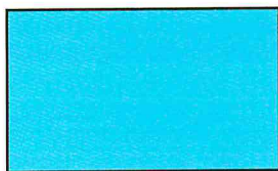


- A) 0 B) 1 Γ) 2 Δ) 4 Ε) 9

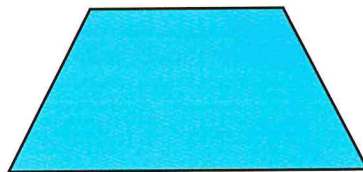
8) Ένα αμπαζούρ έχει το σχήμα κολουρού κώνου, όπως στην εικόνα δεξιά. Τι σχήμα έχει το ανάπτυσμά του, αν το ανοίξουμε και το απλώσουμε στο επίπεδο;



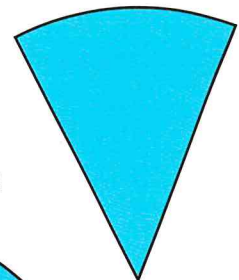
A) ορθογώνιο
παραλληλόγραμμο



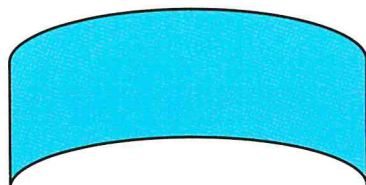
B) τραπέζιο



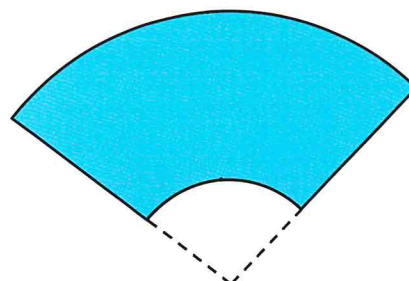
Γ) κυκλικό τομέα



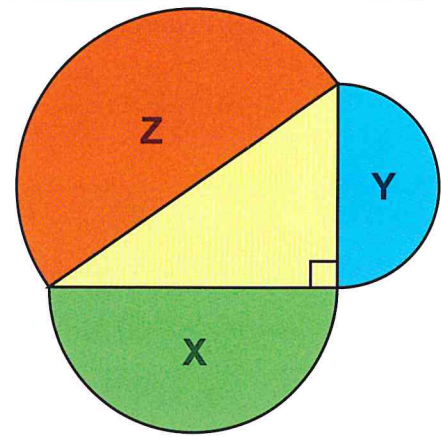
Δ) κυκλική λουρίδα
με παράλληλες πλευρές



Ε) ένα τμήμα κυκλικού τομέα



9) Στις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου σχεδιάζουμε ημικύκλια με τα εμβαδά $X \text{ cm}^2$, $Y \text{ cm}^2$ και $Z \text{ cm}^2$, αντίστοιχα, όπως στο σχήμα. Ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι σίγουρα σωστή;



- A) $X + Y < Z$ B) $\sqrt{X} + \sqrt{Y} = \sqrt{Z}$
 Γ) $X + Y = Z$ Δ) $X^2 + Y^2 = Z^2$
 E) $X^2 + Y^2 = Z$

10) Ποια είναι η τιμή της παράστασης

$$\sqrt{(2015 + 2015) + (2015 - 2015) + (2015 \cdot 2015) + (2015 : 2015)} ;$$

- A) $\sqrt{2015}$ B) 2015 Γ) 2016 Δ) 2017 E) 4030

Ερωτήσεις 4 πόντων:

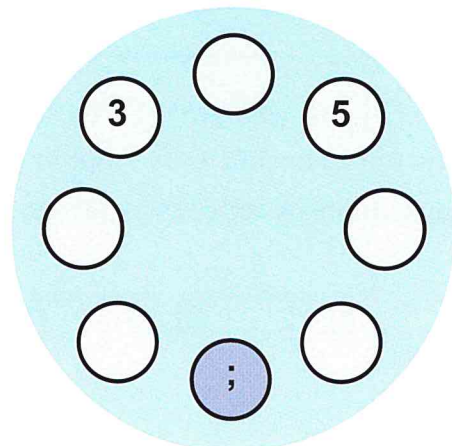
11) Ένα κυρτό τετράπλευρο έχει N το πλήθος οξείες γωνίες. Ποιες είναι όλες οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει το N ;

- A) 0, 1, 2 B) 0, 1, 2, 3 Γ) 0, 1, 2, 3, 4
 Δ) 0, 1, 3 E) 1, 2, 3

12) Στο καρτεσιανό επίπεδο είναι σχεδιασμένα τα γραφήματα των $f(x) = x^2 - 1$ και $g(x) = 2 - x^2$. Σε πόσες περιοχές χωρίζεται το καρτεσιανό επίπεδο από τις δύο αυτές καμπύλες και τους δύο άξονες;

- A) σε 11 B) σε 12 Γ) σε 13 Δ) σε 14 E) σε 15

13) Ο Διόφαντος θέλει να γράψει έναν αριθμό σε κάθε κύκλο στο διπλανό σχήμα έτσι ώστε κάθε αριθμός να είναι ίσος με το άθροισμα των αριθμών στους δύο γειτονικούς του κύκλους. Δύο αριθμοί είναι ήδη γραμμένοι. Τι αριθμό πρέπει να γράψει στον γραμμοσκιασμένο κύκλο;



- A) -5 B) -16 Γ) -8 Δ) -3
 E) Δεν υπάρχει τρόπος να πετύχουμε το ζητούμενο

14) Δίνονται πέντε μη μηδενικοί διαφορετικοί ανά δύο φυσικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ και ε . Μεταξύ τους συνδέονται με τις σχέσεις $\frac{\gamma}{\varepsilon} = \beta$ και $\varepsilon - \delta = \alpha$. Ποιος από τους $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ είναι ο πιο μεγάλος;

- A) α B) β Γ) γ Δ) δ Ε) ε

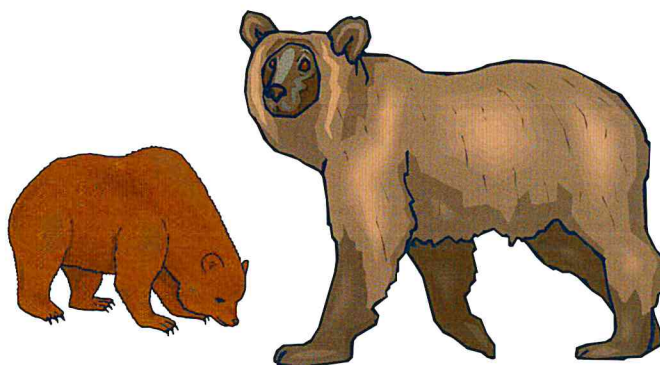
15) Ο γεωμετρικός μέσος N το πλήθος θετικών αριθμών x_1, x_2, \dots, x_N ορίζεται ως η ποσότητα $\sqrt[N]{x_1 x_2 \dots x_N}$. Αν τρεις θετικοί αριθμοί έχουν γεωμετρικό μέσο 3 και τρεις άλλοι έχουν γεωμετρικό μέσο 12, ποιος είναι ο γεωμετρικός μέσος των έξι αυτών αριθμών;

- A) 4 B) 6 Γ) $\frac{15}{2}$ Δ) $\frac{15}{6}$ Ε) 36

16) Σε ένα στρογγυλό τραπέζι κάθονται 5 αγόρια και μερικά κορίτσια (τουλάχιστον ένα). Για κάθε άτομο στο τραπέζι οι δύο διπλανοί του είναι είτε και οι δύο αγόρια είτε και οι δύο κορίτσια. Πόσα κορίτσια κάθονται στο τραπέζι;

- A) 3 B) 4 Γ) 5 Δ) 6 Ε) δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι

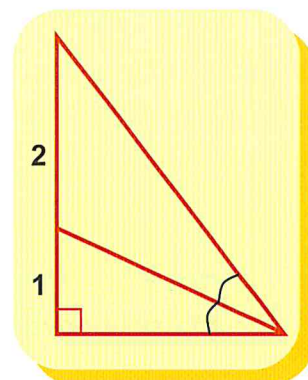
17) Στο δάσος ζουν δύο αρκούδες. Από πέρσι μέχρι φέτος το βάρος της μιας αυξήθηκε κατά 40% και το βάρος της άλλης κατά 60%. Η φίλη τους η αλεπού υπολόγισε ότι από πέρσι μέχρι φέτος το συνολικό τους βάρος αυξήθηκε κατά 54%. Ποιος ήταν πέρσι ο λόγος του βάρους της πρώτης αρκούδας προς το βάρος της δεύτερης;



- A) $\frac{10}{13}$ B) $\frac{20}{27}$ Γ) $\frac{3}{7}$ Δ) $\frac{7}{12}$ Ε) $\frac{2}{3}$

18) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η διχοτόμος μιας οξείας γωνίας χωρίζει την απέναντι κάθετο σε τμήματα μήκους 1 και 2, όπως στο σχήμα. Πόσο είναι το μήκος της άλλης καθέτου;

- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ Γ) 2 Δ) $\sqrt{5}$ Ε) $\sqrt{6}$



19) Στον πίνακα είναι γραμμένοι οι αριθμοί από το 1 μέχρι τον 2015. Ο Διόφαντος έσβησε κάθε έναν από τους αριθμούς και στη θέση του έγραψε το άθροισμα των ψηφίων του. Για παράδειγμα, στην θέση του 1821 έγραψε τον 12 αφού $1+8+2+1=12$. Πόσους διαφορετικούς μεταξύ τους αριθμούς έγραψε ο Διόφαντος;

- A) 10 B) 27 Γ) 28 Δ) 29 Ε) 2015

20) Σε έναν τετραψήφιο αριθμό ΑΒΓΔ τα ψηφία Α, Β, Γ, Δ είναι σε αύξουσα σειρά, $0 < A < B < \Gamma < \Delta$. Ποια είναι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή που μπορεί να πάρει η διαφορά ΒΔ – ΑΓ των διψήφίων ΒΔ και ΑΓ;

- A) 86 B) 61 Γ) 56 Δ) 50 Ε) 16

Ερωτήσεις 5 πόντων:

21) Πόσα κανονικά πολύγωνα υπάρχουν των οποίων οι γωνίες τους (σε μοίρες) είναι φυσικοί αριθμοί;

- A) 17 B) 18 Γ) 22 Δ) 25 Ε) 60

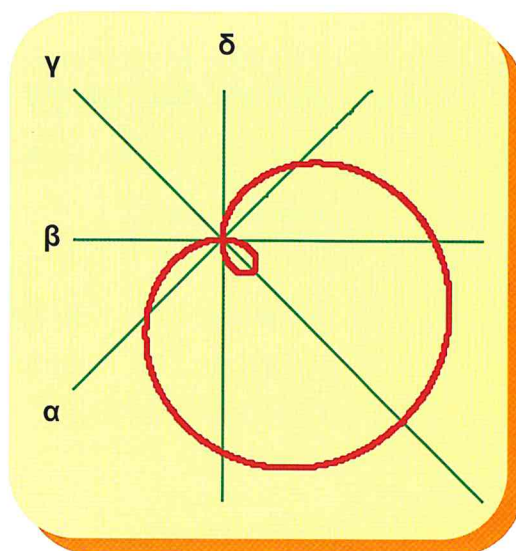
22) Η Υπατία διαίρεσε τον αριθμό 215 με καθένα από τους 1, 2, 3 και λοιπά, μέχρι τον 100. Έγραψε σε ένα χαρτί το υπόλοιπο της κάθε διαίρεσης που έκανε. Ποιο είναι το μεγαλύτερο δυνατό υπόλοιπο που έγραψε;

- A) 15 B) 56 Γ) 71 Δ) 107
Ε) κανένα από τα προηγούμενα

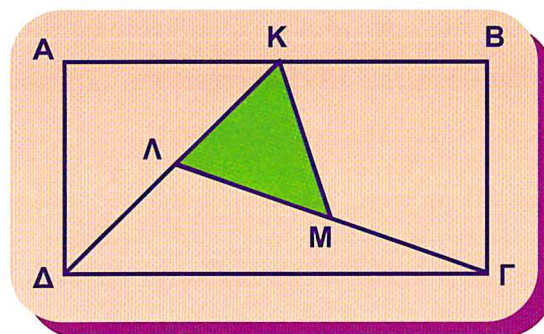
23) Ένας υπολογιστής σχεδίασε όλα τα σημεία (x,y) του Καρτεσιανού επιπέδου που ικανοποιούν την ισότητα $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 2(x^2 + y^2)$. Από λάθος, δεν σημείωσε ποιος είναι ο άξονας των y.

Ποια από τις ευθείες α, β, γ, δ είναι ο άξονας των y;

- A) α B) β Γ) γ Δ) δ
Ε) κανένα από τα προηγούμενα

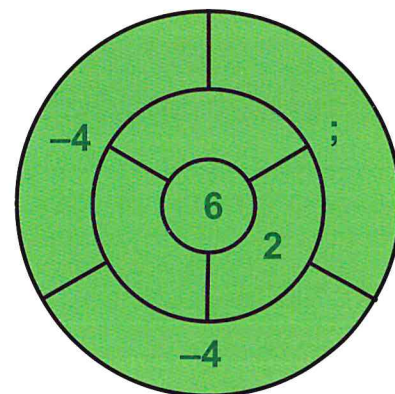


24) Το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 1. Τα Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΔΚ και ΓΛ, αντίστοιχα. Πόσο είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΚΛΜ;



- A) $\frac{3}{16}$ B) $\frac{1}{6}$ Γ) $\frac{1}{8}$
 Δ) $\frac{1}{7}$ Ε) $\frac{3}{14}$

25) Ο χάρτης δείχνει ένα στρογγυλό νησί χωρισμένο 7 περιοχές. Δύο περιοχές λέγονται γειτονικές αν έχουν κοινό σύνορο. Σε κάθε περιοχή γράφουμε έναν αριθμό. Ο αριθμός σε κάθε περιοχή ισούται με το άθροισμα των αριθμών σε όλες τις γειτονικές του περιοχές. Κάποιοι αριθμοί είναι ήδη γραμμένοι. Ποιος αριθμός πρέπει να μπει στην περιοχή με το ερωτηματικό;



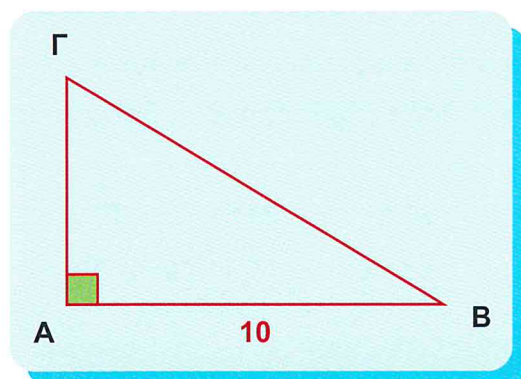
- A) 1 B) -2 Γ) 6 Δ) -4 Ε) 0

26) Ο διπλανός πίνακας είναι η προπαίδια όλων των αριθμών από το 1·1 μέχρι το 10·10. Αν προσθέσουμε τα 100 γινόμενα του πίνακα, πόσο θα βρούμε;

.	1	2	3	...	10
1	1	2	3	...	10
2	2	4	6	...	20
3	3	6	9	...	30
...
10	10	20	30	...	100

- A) 1000 B) 2025 Γ) 2500
 Δ) 3025 Ε) 5500

27) Πόσα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ υπάρχουν με $\widehat{A} = 90^\circ$ και $AB = 10$, τέτοια ώστε όλες τους οι πλευρές έχουν ακέραιο μήκος;



- A) κανένα B) ένα
 Γ) δύο Δ) τρία
 Ε) περισσότερα από 3

28) Σε μία παρέα παιδιών υπάρχουν οι εξής σχέσεις:

- Ακριβώς 7 παιδιά έχουν καστανά μάτια.
- Ο συνολικός αριθμός των αγοριών είναι κατά 2 μικρότερος από τα κορίτσια που έχουν καστανά μάτια.
- Ο συνολικός αριθμός των κοριτσιών είναι κατά 3 μεγαλύτερος από τα αγόρια που έχουν καστανά μάτια.

Πόσα είναι τα αγόρια στην παρέα;

- A) 1 B) 3 Γ) 5 Δ) 6
E) κανένα από τα προηγούμενα

29) Μερικά σημεία βρίσκονται σε μία ευθεία. Σχεδιάζουμε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα με άκρα τα σημεία. Κάποιο από τα σημεία είναι στο εσωτερικό (δηλαδή όχι άκρο) σε 27 από αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα. Κάποιο άλλο από τα σημεία είναι στο εσωτερικό σε 35 από αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα. Πόσα είναι τα σημεία;

- A) 12 B) 13 Γ) 22 Δ) 27
E) δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι

30) Ποια από τις παρακάτω πέντε προτάσεις είναι η πρώτη, κατά σειρά ανάγνωσης, που αληθεύει;

Πρόταση 1:	Η Πρόταση 3 αληθεύει.
Πρόταση 2:	Η Πρόταση 1 αληθεύει.
Πρόταση 3:	Η Πρόταση 5 δεν αληθεύει.
Πρόταση 4:	Η Πρόταση 2 δεν αληθεύει.
Πρόταση 5:	$1 + 1 = 2$

- A) η Πρόταση 1 B) η Πρόταση 2 Γ) η Πρόταση 3
Δ) η Πρόταση 4 E) η Πρόταση 5