

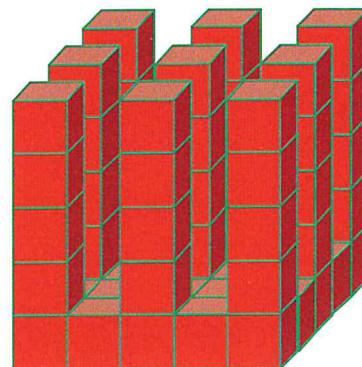
Θέματα Καγκουρό 2014

Επίπεδο: 5

(για μαθητές της Β' και Γ' τάξης Λυκείου)

Ερωτήσεις 3 πόντων:

1) Από έναν $5 \times 5 \times 5$ κύβο αφαιρέθηκαν μερικά $1 \times 1 \times 1$ κυβάκια. Αυτό που έμεινε ήταν μία κατασκευή που αποτελείται από κολώνες οι οποίες στηρίζονται σε μία συμπαγή οριζόντια βάση, όπως δείχνει το σχήμα. Πόσα κυβάκια αφαιρέθηκαν;



- A) 56 B) 60 Γ) 64 Δ) 68 Ε) 80

2) Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς ισούται με το πλήθος των δευτερολέπτων σε ένα διάστημα 6 εβδομάδων;

- A) $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$ B) $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8$
 Γ) $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$ Δ) $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$
 Ε) $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12$

3) Σήμερα ο Κώστας, η Ελένη και η Μαίρη έχουν τα γενέθλιά τους. Το άθροισμα των ηλικιών τους είναι τώρα 44. Σε κάποια επόμενα γενέθλιά τους το άθροισμα των ηλικιών τους θα είναι και πάλι ένας διψήφιος αριθμός με δύο ίδια ψηφία. Πόσο θα είναι το άθροισμα των ηλικιών τους την επόμενη φορά που θα συμβεί αυτό;

- A) 55 B) 66 Γ) 77 Δ) 88 Ε) 99

4) Αν $a^b = \frac{1}{2}$, με πόσο ισούται το a^{-3b} ;

- A) $\frac{1}{8}$ B) 8 Γ) -8 Δ) 6 Ε) $\frac{1}{6}$

5) Στα τρία ράφια μιας βιβλιοθήκης υπάρχουν συνολικά 48 βιβλία. Το πιο πάνω ράφι μαζί με το πιο κάτω ράφι περιέχουν συνολικά τον διπλάσιο αριθμό βιβλίων από ότι το μεσαίο ράφι. Το πιο κάτω ράφι περιέχει τον μισό αριθμό βιβλίων από ότι το μεσαίο. Πόσα βιβλία περιέχει το πάνω ράφι;

- A) 16 B) 20 Γ) 24 Δ) 30 Ε) 32

6) Ποια είναι η τιμή του $\frac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}}$;

- A) 2^{2011} B) 2^{2012} Γ) 2^{2013} Δ) 1 Ε) 2

7) Ποιο από τα παρακάτω πολυώνυμα δεν έχει το $x + 1$ ως παράγοντα σε παραγοντοποίησή του ως γινόμενο πολυωνύμων;

- A) $2x + 2$ B) $x^2 - 1$ Γ) $x^2 + x$ Δ) $-x - 1$ Ε) $x^2 + 1$

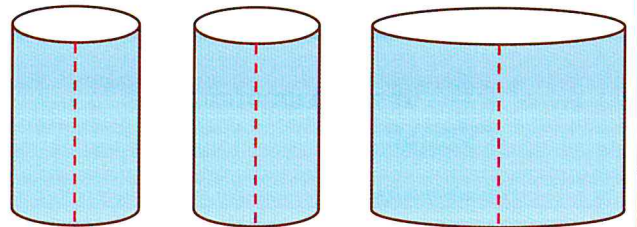
8) Πόσα ψηφία έχει το γινόμενο $(2^{22})^3 (5^{33})^2$ όταν γραφεί σε δεκαδική μορφή, μετά τις πράξεις;

- A) 22 B) 33 Γ) 55 Δ) 66 Ε) 67

9) Ένα καγκουρό έχει κινητό τηλέφωνο. Τον αριθμό του κινητού του το ξέρουν μόνο οι τέσσερις αδελφές του, και κανένας άλλος. Σήμερα το καγκουρό έλαβε συνολικά 8 κλήσεις από τις αδελφές του. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι **σίγουρα** σωστή;

- A) Το καγκουρό έλαβε ακριβώς δύο κλήσεις από κάθε αδελφή του
 B) Το καγκουρό έλαβε τουλάχιστον δύο κλήσεις από κάθε αδελφή του
 Γ) Το καγκουρό έλαβε τουλάχιστον μία κλήση από κάθε αδελφή του
 Δ) Το καγκουρό έλαβε τουλάχιστον δύο κλήσεις από κάποια αδελφή του
 Ε) Αποκλείεται και οι 8 κλήσεις να είναι από μία από τις αδελφές του

10) Δύο ίδια κυλινδρικά δοχεία κόβονται κατά μήκος της διακεκομμένης γραμμής, όπως δείχνει το σχήμα. Ανοίγουμε τα δύο κομμάτια και μετά τα κολλάμε για να φτιάξουμε ένα μεγαλύτερο κυλινδρικό δοχείο. Τι μπορούμε να πούμε για τον όγκο του μεγάλου κυλίνδρου σε σύγκριση με τον όγκο καθενός από τους δύο αρχικούς;



- A) Ο όγκος του μεγάλου κυλίνδρου είναι διπλάσιος του όγκου καθενός από τους αρχικούς
 B) Ο όγκος του μεγάλου κυλίνδρου είναι τριπλάσιος του όγκου καθενός από τους αρχικούς
 Γ) Ο όγκος του μεγάλου κυλίνδρου είναι π φορές ο όγκος καθενός από τους αρχικούς
 Δ) Ο όγκος του μεγάλου κυλίνδρου είναι 4 φορές ο όγκος καθενός από τους αρχικούς
 Ε) Ο όγκος του μεγάλου κυλίνδρου είναι 8 φορές ο όγκος καθενός από τους αρχικούς

Ερωτήσεις 4 πόντων:

11) Παρατηρούμε ότι στον αριθμό 2014 της χρονολογίας μας φέτος τα ψηφία είναι διαφορετικά μεταξύ τους και το τελευταίο ψηφίο είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των τριών άλλων ψηφίων. Πόσα χρόνια πέρασαν από **την τελευταία φορά** που συνέβη το ίδιο φαινόμενο;

- A) 5 B) 215 Γ) 305 Δ) 395 E) 485

12) Εννέα πάστες είναι αριθμημένες διαδοχικά με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ένα καγκουρό έφαγε τέσσερις από τις πάστες. Μετά παρατήρησε ότι το άθροισμα των αριθμών σε οποιοδήποτε δύο από τις πάστες που έμειναν είναι άρτιος αριθμός. Πόσο είναι το άθροισμα των αριθμών στις πάστες που έφαγε το καγκουρό;

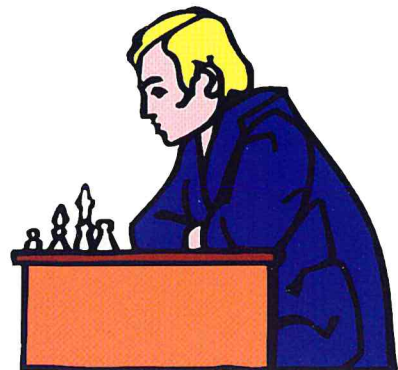
- A) 18 B) 19 Γ) 20 Δ) 22
E) Δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι

13) Οι διαστάσεις ενός κουτιού σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι abc όπου $a < b < c$. Αν αυξήσουμε ένα από τα a , b ή c κατά μία μονάδα, ο όγκος του κουτιού μεγαλώνει. Σε ποια από τις παρακάτω περιπτώσεις η αύξηση του όγκου είναι μεγαλύτερη;

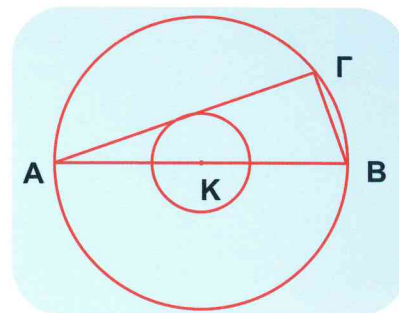
- A) Αν αυξήσουμε το a
B) Αν αυξήσουμε το b
Γ) Αν αυξήσουμε το c
Δ) Δεν έχει σημασία ποιο θα αυξήσουμε γιατί ο όγκος αυξάνει κατά την ίδια ποσότητα
E) Δεν μπορούμε να ξέρουμε γιατί η απάντηση εξαρτάται από τις αρχικές τιμές των a , b , c

14) Σε ένα τουρνουά σκακιού πήραν μέρος 4 παίκτες, η Άννα, ο Βασίλης, ο Γιάννης και η Δήμητρα. Κάθε παίκτης έπαιξε από μία φορά εναντίον κάθε άλλου. Οι παίκτες έλαβαν 3 πόντους για κάθε νίκη, 1 πόντο για κάθε ισοπαλία και 0 για κάθε ήττα. Στο τέλος του τουρνουά η Άννα συγκέντρωσε 7 πόντους. Ο Βασίλης και ο Γιάννης συγκέντρωσαν από 4 πόντους ο καθένας. Πόσους πόντους συγκέντρωσε η Δήμητρα;

- A) 0 B) 1 Γ) 2 Δ) 3 E) 4



15) Οι ακτίνες δύο ομόκεντρων κύκλων έχουν λόγο 1:3. Η AB είναι διάμετρος του μεγάλου κύκλου, και η χορδή του ΑΓ εφάπτεται του μικρού. Αν ΒΓ = 12, πόση είναι η ακτίνα του μεγάλου κύκλου;



- A) 13 B) 18 Γ) 21 Δ) 24 Ε) 26

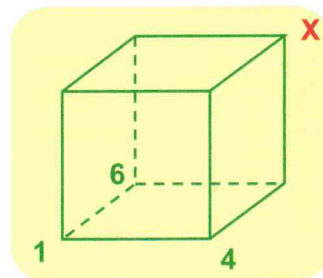
16) Η συνάρτηση $f(x) = ax + b$ ικανοποιεί τις ισότητες $f(f(f(0))) = 2$ και $f(f(f(1))) = 29$. Ποια είναι η τιμή του a ;

- A) 1 B) 2 Γ) 3 Δ) 4 Ε) 5

17) Οι α, β, γ είναι μη μηδενικοί αριθμοί και ο v φυσικός αριθμός με $v \geq 1$. Είναι γνωστό ότι οι αριθμοί $(-2)^{2v+3} \alpha^{2v+2} \beta^{2v-1} \gamma^{2v+2}$ και $(-3)^{2v+2} \alpha^{4v+1} \beta^{2v+5} \gamma^{2v-4}$ είναι ομόσημοι. Ποιο από τα παρακάτω είναι σίγουρα σωστό;

- A) $\alpha > 0$ B) $\beta > 0$ Γ) $\gamma > 0$ Δ) $\alpha < 0$ Ε) $\beta < 0$

18) Τοποθετούμε τους αριθμούς 1 έως 8, ανά έναν, στις οκτώ κορυφές ενός κύβου. Αν προσθέσουμε τους 4 αριθμούς στις κορυφές οποιασδήποτε έδρας του κύβου βρίσκουμε το ίδιο άθροισμα σε όλες τις περιπτώσεις. Οι αριθμοί 1, 4 και 6 είναι ήδη τοποθετημένοι, όπως δείχνει το σχήμα. Ποιος αριθμός είναι στην κορυφή X;

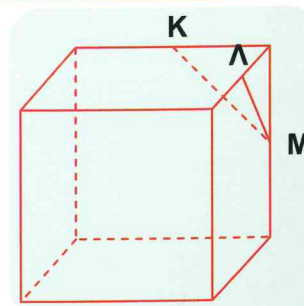


- A) 2 B) 3 Γ) 5 Δ) 7 Ε) 8

19) Σε μία μεγάλη αγέλη από καγκουρό το 80 % των αρσενικών έχει καφέ χρώμα μάτια. Τα αρσενικά που έχουν καφέ χρώμα μάτια είναι το 20 % του πληθυσμού της αγέλης. Τι ποσοστό της αγέλης είναι θηλυκά καγκουρό;

- A) 80% B) 75% Γ) 64% Δ) 60% Ε) 48%

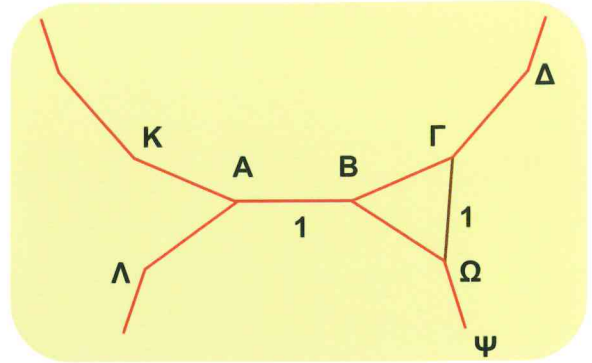
20) Τα Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των ακμών ενός κύβου, όπως δείχνει το διπλανό σχήμα. Πόσες μοίρες είναι η γωνία $\widehat{ΚΜΛ}$;



- A) 10° B) 15° Γ) 30°
 Δ) 45° Ε) 60°

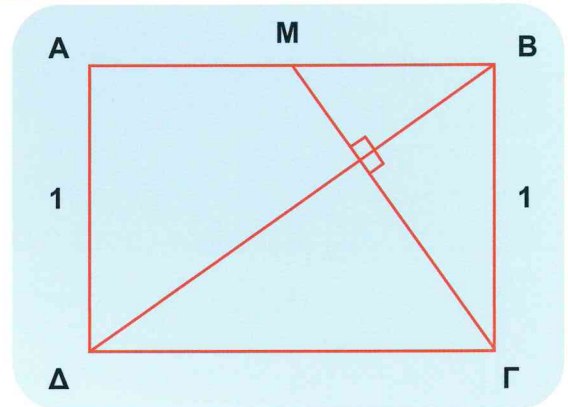
Ερωτήσεις 5 πόντων:

21) Δύο κανονικά πολύγωνα πλευράς 1 έχουν κοινή την πλευρά τους AB και βρίσκονται από αντίθετες πλευρές της AB. Το ένα είναι κανονικό 15-γωνο ABΓΔ...Κ και το ABΩΨ...Λ είναι κανονικό πολύγωνο με n πλευρές. Ποια είναι η τιμή του n αν ΓΩ=1; (Το σχήμα δείχνει ένα μέρος των κανονικών πολυγώνων και δεν είναι σχεδιασμένο υπό κλίμακα).



- A) 10 B) 12 Γ) 15
 Δ) 16 Ε) 18

22) Το ABΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με ΒΓ=ΑΔ=1. Το Μ είναι το μέσον της πλευράς AB και η ΜΓ είναι κάθετη στην διαγώνιο ΒΔ. Πόσο είναι το μήκος της AB;

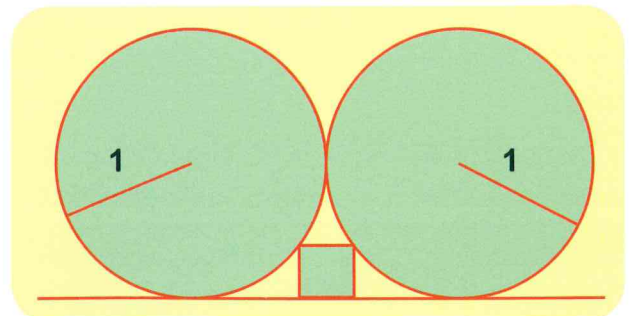


- A) 2 B) $\sqrt{3}$ Γ) $\frac{3}{2}$
 Δ) $\sqrt{2}$ Ε) $\frac{5}{4}$

23) Στο δάσος υπάρχουν 9 καγκουρό. Κάποια από αυτά έχουν κίτρινο χρώμα ενώ τα υπόλοιπα είναι καφέ. Με τα καγκουρό αυτά φτιάχνουμε όλες τις δυνατές ομάδες που αποτελούνται από 3 καγκουρό. Αν το πλήθος των ομάδων που αποτελούνται από 3 κίτρινα καγκουρό ισούται με τα $\frac{2}{3}$ του συνόλου των ομάδων, πόσα είναι τα κίτρινα καγκουρό;

- A) 1 B) 3 Γ) 5 Δ) 6 Ε) 8

24) Δύο κύκλοι ακτίνας 1 εφάπτονται μεταξύ τους και εφάπτονται σε μία οριζόντια ευθεία. Ένα τετράγωνο έχει μία πλευρά του πάνω στην ευθεία και δύο κορυφές του πάνω στους κύκλους, όπως δείχνει το σχήμα. Πόσο είναι το μήκος της πλευράς του τετραγώνου;



- A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ Γ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ Δ) $\frac{1}{5}$ Ε) $\frac{1}{2}$

25) Ο Διόφαντος θέλει να γράψει στον πίνακα διαφορετικούς ανά δύο θετικούς ακεραίους οι οποίοι είναι μικρότεροι ή ίσοι του 100. Θέλει όμως το γινόμενο των αριθμών που θα γράψει **να μην είναι** πολλαπλάσιο του 27. Ποιο είναι το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος αριθμών που μπορεί να γράψει;

- A) 8 B) 17 Γ) 67 Δ) 69 E) 90

26) Στον πίνακα είναι γραμμένοι 10 διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι. Ακριβώς 5 από αυτούς είναι πολλαπλάσια του 5 και ακριβώς 7 από αυτούς είναι πολλαπλάσια του 7. Αν M είναι ο πιο μεγάλος από τους 10 αριθμούς στον πίνακα, ποια είναι η μικρότερη δυνατή τιμή που μπορεί να έχει ο M;

- A) 105 B) 77 Γ) 75 Δ) 63 E) κανένα από τα προηγούμενα

27) Για πόσους διαφορετικούς φυσικούς αριθμούς n ο αριθμός $1024^{\frac{1}{n}}$ είναι φυσικός; Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το γεγονός ότι κάθε φυσικός αριθμός έχει μοναδική ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

- A) Κανένα B) 1 Γ) 2 Δ) 4 E) άπειρους

28) Πόσες τριάδες (a, b, c) φυσικών αριθμών υπάρχουν με $a > b > c > 1$ και $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$;

- A) καμία B) μία Γ) δύο Δ) τρεις E) άπειρες

29) Μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί $f(3)=2$ και $xf(x)=(x-2)f(x+1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η τιμή του γινομένου $f(3)f(5)f(7)\dots f(97)f(99)$.

- A) 0 B) 100 Γ) $99 \cdot 100$ Δ) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 98 \cdot 99$ E) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100$

30) Στο δάσος ενός μαγικού νησιού ζουν τρία ήδη ζώων: Λιοντάρια, αλεπούδες και κουνέλια. Τα λιοντάρια τρώνε μόνο αλεπούδες, οι αλεπούδες τρώνε μόνο κουνέλια και τα κουνέλια τρώνε μόνο λιοντάρια. Επίσης, όταν ένα λιοντάρι φάει μία αλεπού τότε το λιοντάρι μετατρέπεται μαγικά σε κουνέλι. Όταν μία αλεπού φάει ένα κουνέλι τότε η αλεπού μετατρέπεται σε λιοντάρι. Τέλος, όταν ένα κουνέλι φάει ένα λιοντάρι, τότε το κουνέλι μετατρέπεται σε αλεπού. Στην αρχή υπάρχουν 6 λιοντάρια, 55 αλεπούδες και 17 κουνέλια αλλά από τα φαγώματα ο συνολικός αριθμός μειώνεται σταδιακά. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός από ζώα που μπορούν να μείνουν στο τέλος, όταν δεν υπάρχουν πια άλλα φαγώματα;

- A) 1 B) 6 Γ) 17 Δ) 23 E) 35