

## Θέματα Καγκουρό 2013

Επίπεδο: 5

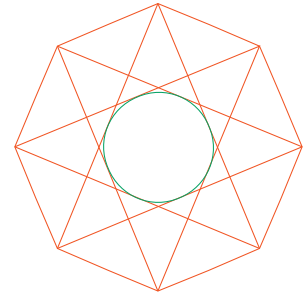
(για μαθητές της Β΄ και Γ΄ τάξης Λυκείου)

## Ερωτήσεις 3 πόντων:

1) Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι ο μεγαλύτερος;

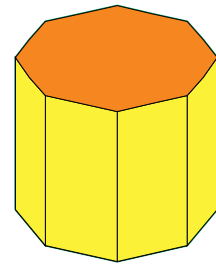
- A) 2013      B)  $2^{0+13}$       Γ)  $20^{13}$       Δ)  $201^3$       E)  $20 \cdot 13$

2) Η κάθε πλευρά του κανονικού εξωτερικού οκταγώνου της εικόνας έχει μήκος 10cm. Πόσο είναι το μήκος της ακτίνας του κύκλου ο οποίος είναι εγγεγραμμένος στο μικρό εσωτερικό οκτάγωνο;



- A) 10 cm      B) 7,5 cm      Γ) 5 cm  
Δ) 2,5 cm      E) 2 cm

3) Ένα πρίσμα έχει συνολικά 2013 έδρες. Πόσες ακμές έχει το πρίσμα αυτό; (Στην εικόνα φαίνεται ένα πρίσμα που δεν είναι της ερώτησης.)



- A) 2011      B) 2013      Γ) 4022  
Δ) 4024      E) 6033

4) Ποια είναι η κυβική ρίζα του  $3^{(3^3)}$ ;

- A)  $3^3$       B)  $3^{(3^3-1)}$       Γ)  $3^{(2^3)}$       Δ)  $3^{(3^2)}$       E)  $(\sqrt{3})^3$

5) Το έτος 2013 έχει την ιδιότητα ότι ως αριθμός αποτελείται από τα διαδοχικά ψηφία 0, 1, 2 και 3. Πόσα χρόνια πέρασαν από τη περασμένη φορά που το έτος της χρονολογίας εκείνης αποτελείτο από τέσσερα διαδοχικά ψηφία;

- A) 467      B) 527      Γ) 581      Δ) 693      E) 990

6) Ποια είναι η τιμή της παράστασης  $\sqrt{4 + \sqrt{3 + \sqrt{48}}} \cdot \sqrt{4 - \sqrt{3 + \sqrt{48}}} \cdot \sqrt{13 + \sqrt{48}}$ ;

- A) 11      B) 13      Γ)  $\sqrt{13 - \sqrt{48}}$       Δ)  $\sqrt{169 - \sqrt{48}}$   
E) Κανένα από τα προηγούμενα

7) Μία συνάρτηση της μορφής  $f(x) = ax + b$  ικανοποιεί  $f(2013) - f(2001) = 100$ . Ποια είναι η τιμή του  $f(2031) - f(2013)$ ;

- A) 75      B) 100      Γ) 120      Δ) 150      E) 180

8) Αν το  $x$  ικανοποιεί την ανισότητα  $2 < x < 3$ , πόσες από τις ακόλουθες σχέσεις

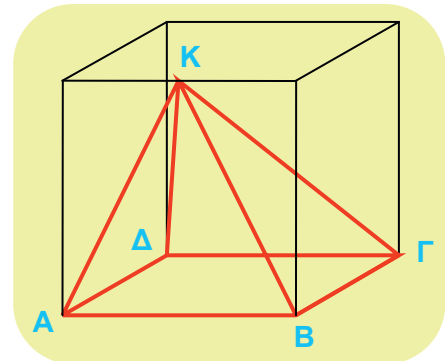
α)  $4 < x^2 < 9$ , β)  $4 < 2x < 9$  γ)  $6 < 3x < 9$  και δ)  $0 < x^2 - 2x < 3$  είναι σίγουρα αληθείς;

- A) καμία      B) μία      Γ) δύο      Δ) τρεις      E) τέσσερις

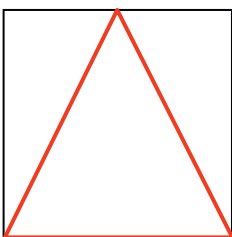
9) Στο δάσος υπάρχουν 20 καγκουρό που ζουν σε 6 φωλιές. Στη πρώτη φωλιά ζει 1 καγκουρό, στη δεύτερη 2 και στη τρίτη 3. Στη τέταρτη φωλιά ζούνε περισσότερα καγκουρό από ότι σε οποιαδήποτε από τις άλλες πέντε φωλιές. Ποιος είναι ο μικρότερος δυνατός αριθμός από καγκουρό που μπορεί να ζουν στη τέταρτη φωλιά;

- A) 7      B) 6      Γ) 5      Δ) 4      E) 3

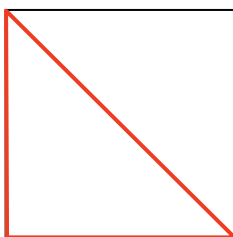
10) Μέσα σε έναν γυάλινο κύβο όπως στο σχήμα υπάρχει μια αδιαφανής πυραμίδα ΑΒΓΔΚ, που η κορυφή της Κ είναι στη μέση μιας ακμής του κύβου. Κοιτάμε την πυραμίδα από πάνω, από κάτω, από μπρος, από πίσω, από αριστερά και από δεξιά. Ποιο από τα παρακάτω σχήματα **δεν** θα δούμε;



A)



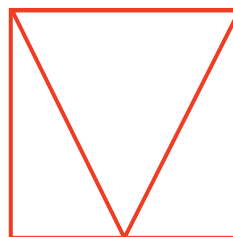
B)



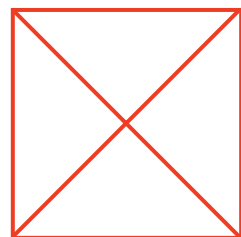
Γ)



Δ)



E)

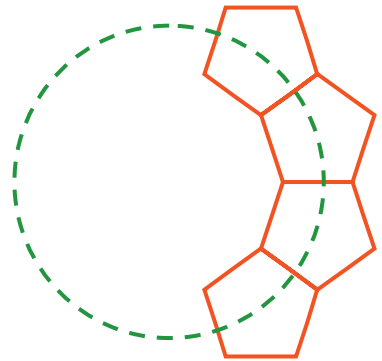


### Ερωτήσεις 4 πόντων:

11) Σε μία τάξη 23 μαθητών, τα παιδιά έχουν συνολικά 72 βιβλία στις τσάντες τους. Κάποια παιδιά έχουν από 3 βιβλία, κάποια έχουν από 4 και τα υπόλοιπα από 5 βιβλία. Πόσα από τα παιδιά έχουν 4 βιβλία στη τσάντα τους;

- A) 1      B) 2      Γ) 3      Δ) 4      E) 5

12) Ο Ευκλείδης κρατά μερικά κανονικά πεντάγωνα τα οποία είναι όλα ίδια μεταξύ τους. Τα τοποθετεί το ένα δίπλα στο άλλο για να φτιάξει ένα κυκλικό σχήμα. Η εικόνα δίπλα δείχνει μέρος της κατασκευής του. Πόσα πεντάγωνα θα χρειαστεί για την κατασκευή του;



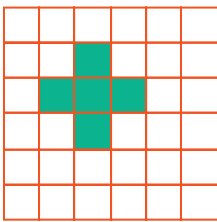
- A) 8      B) 9      Γ) 10      Δ) 12      E) 15

13) Πόσοι φυσικοί αριθμοί  $N$  υπάρχουν έτσι ώστε οι  $\frac{N}{3}$  και  $3N$  να είναι και οι δύο τριψήφιοι αριθμοί;

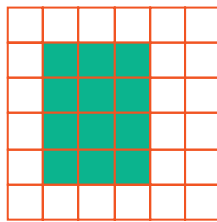
- A) 12      B) 33      Γ) 34      Δ) 100      E) 300

14) Ένα κυκλικό χαλί τοποθετείται σε ένα πάτωμα το οποίο αποτελείται από τετράγωνα πλακάκια. Όλα τα πλακάκια των οποίων το εσωτερικό τους έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με το χαλί έχουν χρωματιστεί πράσινα. Ποια από τις παρακάτω εικόνες δεν μπορεί να είναι σωστή;

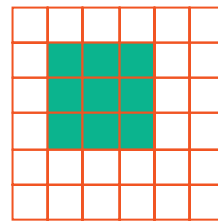
A)



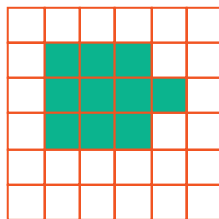
B)



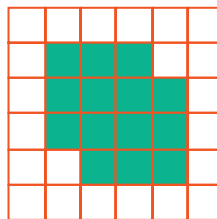
Γ)



Δ)



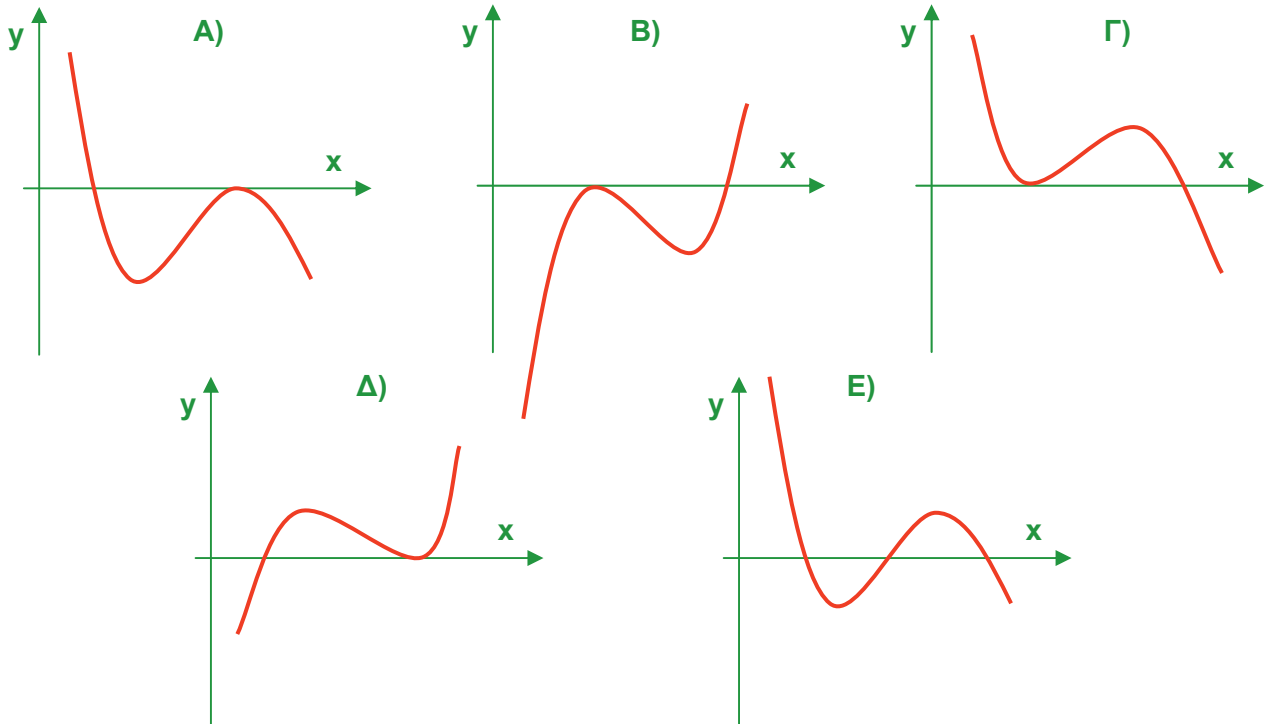
E)



15) Σε ένα κουτί υπάρχουν άσπρα και πράσινα χαρτάκια. Στο κάθε χαρτάκι είναι σημειωμένος από ένας φυσικός αριθμός. Ο Διόφαντος ισχυρίστηκε ότι σε κάθε άσπρο χαρτί ο σημειωμένος αριθμός είναι άρτιος. Αν ο Διόφαντος κάνει λάθος, πιο από τα παρακάτω είναι σίγουρα σωστό για τα χαρτάκια αυτά;

- A) Σε κάθε άσπρο χαρτί ο σημειωμένος αριθμός είναι περιττός.  
 B) Σε κάθε πράσινο χαρτί ο σημειωμένος αριθμός είναι άρτιος.  
 Γ) Σε κάθε πράσινο χαρτί ο σημειωμένος αριθμός είναι περιττός.  
 Δ) Υπάρχει άσπρο χαρτί στο οποίο ο σημειωμένος αριθμός είναι περιττός.  
 E) Υπάρχει πράσινο χαρτί στο οποίο ο σημειωμένος αριθμός είναι περιττός.

16) Μία συνάρτηση δίνεται από τον τύπο  $f(x) = (a - x)(b - x)^2$ , όπου  $a < b$ . Το γράφημά της είναι ένα από το παρακάτω. Ποιο είναι το γράφημά της;

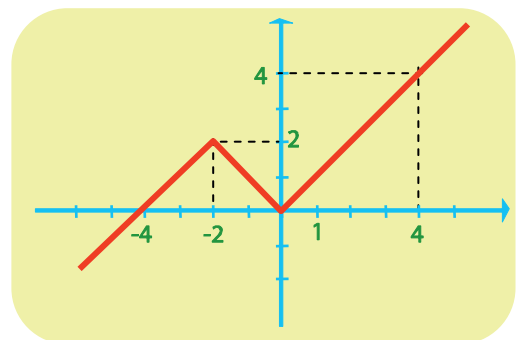


17) Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο από χαρτί έχει τη μία πλευρά του ίση με 5. Το ορθογώνιο αυτό μπορεί να κοπεί με το ψαλίδι σε δύο κομμάτια που το ένα είναι τετράγωνο και το άλλο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Το ένα από τα δύο κομμάτια (δεν ξέρουμε ποιο) έχει εμβαδόν 4. Πόσα συνολικά τέτοια ορθογώνια παραλληλόγραμμα υπάρχουν;

- A) 1      B) 2      Γ) 3      Δ) 4      E) 5

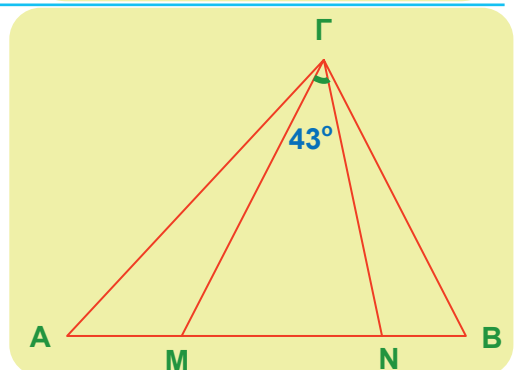
18) Το γράφημα μίας συνάρτησης  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  αποτελείται από δύο ημιευθείες και ένα ευθύγραμμο τμήμα, όπως δείχνει η εικόνα. Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση  $f(f(x)) = 0$ ;

- A) 4      B) 3      Γ) 2      Δ) 1      E) 0



19) Σε ένα τρίγωνο ABΓ τα σημεία M και N είναι πάνω στην πλευρά ΒΓ. Έστω ότι ισχύει  $AN = AG$  και  $BM = BG$ . Πόσες μοίρες είναι η γωνία  $\widehat{AGB}$  αν  $\widehat{MGN} = 43^\circ$ .

- A)  $86^\circ$       B)  $89^\circ$       Γ)  $90^\circ$       Δ)  $92^\circ$       E)  $94^\circ$



20) Πόσα ζεύγη  $(m, n)$  θετικών ακεραίων ικανοποιούν την εξίσωση  $m^2 n^3 = 6^{12}$ ;

- A) 6      B) 8      Γ) 10      Δ) 12      E) Κανένα από τα προηγούμενα

### Ερωτήσεις 5 πόντων:

21) Ένα κουτί περιέχει 900 καρτέλες που είναι αριθμημένες με τους αριθμούς από το 100 μέχρι και το 999. Διαφορετικές καρτέλες περιέχουν διαφορετικούς αριθμούς. Ένα καγκουρό πήρε στη τύχη μερικές από τις καρτέλες και βρήκε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού σε κάθε μία από αυτές. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός από καρτέλες που πρέπει να πάρει το καγκουρό για να εξασφαλίσει ότι σε τρεις τουλάχιστον καρτέλες θα βρει το ίδιο άθροισμα;

- A) 51      B) 52      Γ) 53      Δ) 54      E) 55

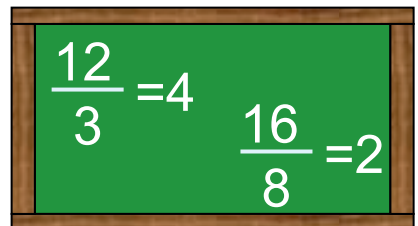
22) Πόσα ζεύγη  $(x, y)$  φυσικών αριθμών μεγαλύτερων του 0 υπάρχουν των οποίων το γινόμενο ισούται με 5 φορές το άθροισμα τους;

- A) κανένα      B) 1      Γ) 2      Δ) 3      E) 4

23) Έστω  $T$  το πλήθος των τελείων τετραγώνων από το 1 μέχρι και το  $2013^6$ , και έστω  $K$  το πλήθος των τελείων κύβων από το 1 μέχρι και το  $2013^6$ . Τότε ισχύει

- A)  $T = K$       B)  $2T = 3K$       Γ)  $3T = 2K$       Δ)  $T = 2013K$       E)  $T^3 = K^2$

24) Στον πίνακα είναι γραμμένοι οι φυσικοί αριθμοί από το 1 έως και το 22. Με τους αριθμούς αυτούς, χωρίς να παραλείψουμε κανέναν, φτιάχνουμε 11 κλάσματα. Πόσα το πολύ από αυτά τα κλάσματα μπορεί να είναι φυσικοί αριθμοί μετά τις απλοποιήσεις;



- A) 7      B) 8      Γ) 9      Δ) 10      E) 11

25) Πόσα ζεύγη  $(x, y)$ , όπου  $x, y$  θετικοί πραγματικοί αριθμοί, ικανοποιούν την εξίσωση  $x^2 + y^2 = x + y$ ;

- A) 1      B) 2      Γ) 4      Δ) 8      E) άπειρα το πλήθος

26) Έστω  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  συνάρτηση με  $f(n) = \frac{n}{2}$  αν  $n$  άρτιος και  $f(n) = \frac{n-1}{2}$  αν  $n$  περιττός. Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση  $f(f(f(f(n)))) = 1$ ;

- A) καμία                      B) 4                      Γ) 8                      Δ) 16                      E) άπειρες

27) Μερικές ευθείες είναι σχεδιασμένες στο επίπεδο. Μία από αυτές τέμνει ακριβώς 3 από τις υπόλοιπες. Μία δεύτερη τέμνει ακριβώς 4 από τις υπόλοιπες. Μία τρίτη τέμνει ακριβώς  $N$  από τις υπόλοιπες, όπου  $N \neq 3$  και  $N \neq 4$ . Πόσες είναι οι σχεδιασμένες ευθείες;

- A) 4                      B) 5                      Γ) 6                      Δ) 7                      E) Κανένα από τα προηγούμενα

28) Έστω ότι το άθροισμα  $1 + 2 + 3 + \dots + N$  των  $N$  πρώτων θετικών ακεραίων είναι ένας τριψήφιος αριθμός του οποίου όλα τα ψηφία είναι ίδια μεταξύ τους. Πόσο είναι το άθροισμα των ψηφίων του  $N$ ;

- A) 6                      B) 9                      Γ) 12                      Δ) 15                      E) 18

29) Στο δάσος ζουν δύο είδη από καγκουρό, αυτά που λένε πάντα την αλήθεια και αυτά που λένε πάντα ψέματα. Μια μέρα συνάντησα δύο καγκουρό. Ρώτησα το πρώτο αν και τα δύο λένε πάντα την αλήθεια. Μου απάντησε αλλά δεν μπόρεσα να βγάλω συμπέρασμα ποιο είναι το είδος καθενός. Μετά ρώτησα το δεύτερο καγκουρό αν το πρώτο έλεγε πάντα την αλήθεια. Μου απάντησε. Από την απάντησή του μπόρεσα να καταλάβω το είδος του καθενός. Ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό για τα καγκουρό αυτά;

- A) Και τα δύο λένε πάντα την αλήθεια  
 B) Και τα δύο λένε πάντα ψέματα  
 Γ) Το πρώτο λέει πάντα την αλήθεια και το δεύτερο πάντα ψέματα  
 Δ) Το πρώτο λέει πάντα ψέματα και το δεύτερο πάντα την αλήθεια  
 E) Οι πληροφορίες δεν επαρκούν για να βγάλουμε συμπέρασμα

30) Ο κύριος Σοφός έγραψε μια σειρά από αριθμούς τους οποίους ονόμασε  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , αντίστοιχα. Ο πρώτος, δηλαδή ο  $a_1$ , ήταν ίσος με 1. Από εκεί και πέρα ίσχυε ο κανόνας  $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$  όπου  $m, n \geq 1$  φυσικοί αριθμοί. Ποιος είναι ο  $a_{30}$ ;

- A) 31                      B) 245                      Γ) 420  
 Δ) 465                      E) κανένα από τα προηγούμενα