

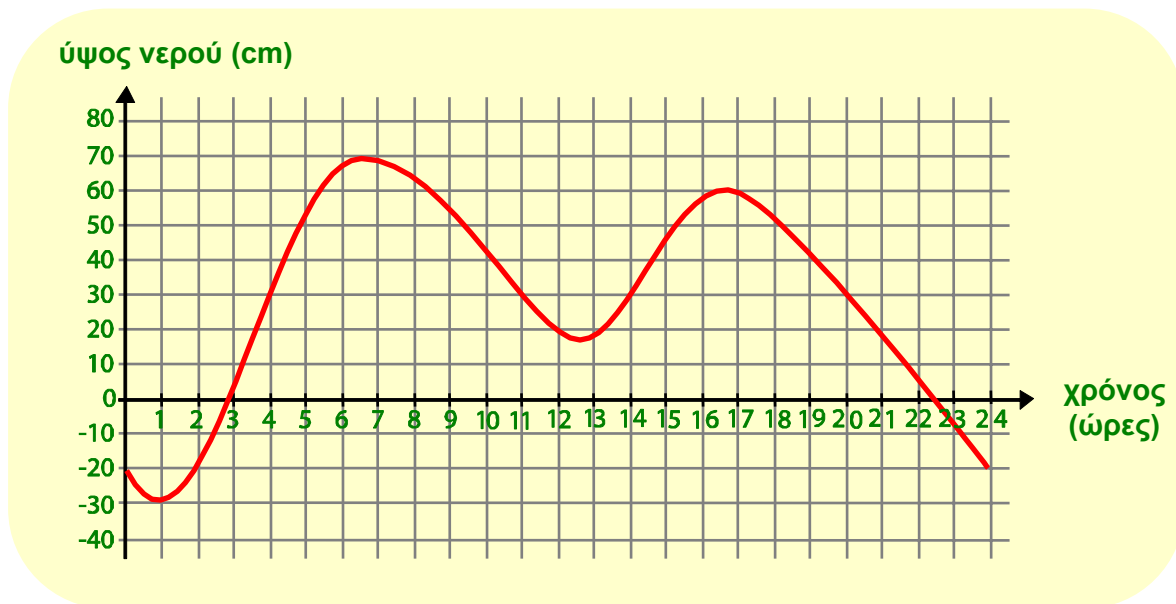
## Θέματα Καγκουρό 2012

Επίπεδο: 5

(για μαθητές της Β' και Γ' τάξης Λυκείου)

## Ερωτήσεις 3 πόντων:

- 1) Το ύψος σε cm της επιφάνειας του νερού σε ένα λιμάνι αυξομειώνεται σύμφωνα με το παρακάτω διάγραμμα. Πόσες ώρες της ημέρας το ύψος του νερού ήταν μεγαλύτερο από 30 cm;



- A) 5      B) 6      Γ) 7      Δ) 9      Ε) 13

- 2) Με πόσο ισούται ο αριθμός  $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$  ;

- A) 1      B)  $\sqrt{2}$       Γ)  $\sqrt[8]{4}$       Δ)  $\sqrt[3]{4}$       Ε) 2

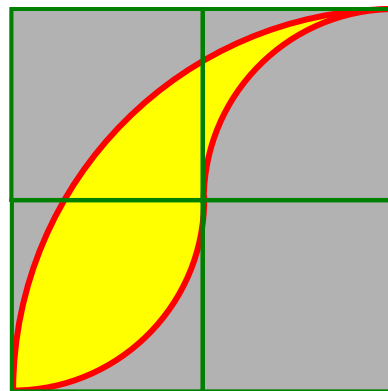
- 3) Ο Διόφαντος θέλει να βάλει από έναν αριθμό στα τρία άδεια κουτάκια του διπλανού σχήματος. Θέλει το γινόμενο των τριών πρώτων αριθμών του σχήματος



- να είναι 30, το γινόμενο των τριών μεσαίων να είναι 90 και το γινόμενο των τριών τελευταίων να είναι 360. Ποιον αριθμό πρέπει να βάλει στο μεσαίο κουτάκι;

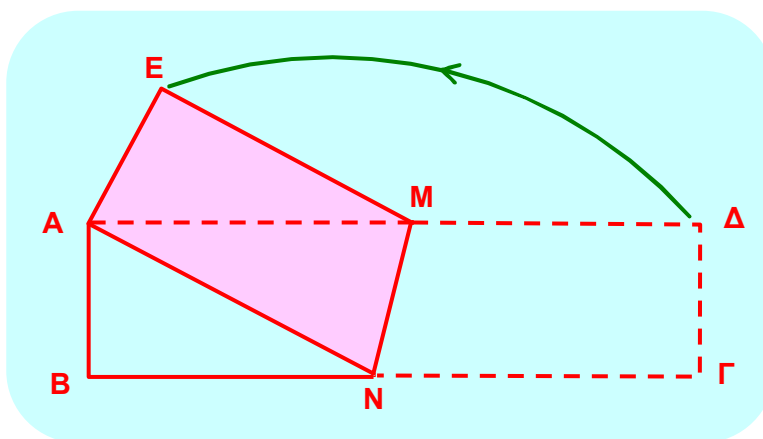
- A) 3      B) 4      Γ) 5      Δ) 6      Ε) 10

4) Ο τοίχος αποτελείται από 4 τετράγωνα με πλευρά 1 μέτρο. Ο καλλιτέχνης έβαψε κίτρινο ένα τμήμα του τοίχου (οι καμπύλες είναι τεταρτοκύκλια). Πόσο είναι το εμβαδόν του τμήματος που έβαψε;



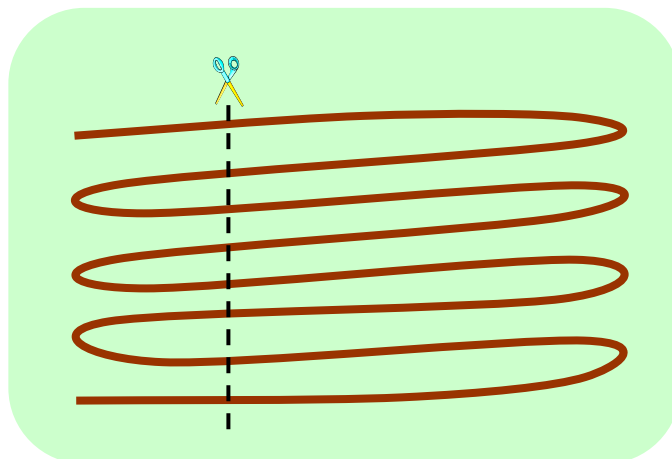
- A)  $\frac{\pi + 2}{4}$  τ.μ.      B)  $\pi - 2$  τ.μ.      Γ)  $\frac{2\pi - 1}{4}$  τ.μ.  
 Δ)  $\frac{2\pi + 3}{4}$  τ.μ.      E)  $16(\pi - 2)$  τ.μ.

5) Ένα κομμάτι χαρτί ΑΒΓΔ σχήματος ορθογωνίου διαστάσεων  $4\text{cm} \times 16\text{cm}$  διπλώνεται κατά μήκος της ευθείας ΜΝ έτσι ώστε η κορυφή Γ να συμπίπτει με την Α, όπως στην εικόνα. Πόσο είναι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΝΜΕ;



- A)  $28 \text{ cm}^2$       B)  $30 \text{ cm}^2$   
 Γ)  $32 \text{ cm}^2$       Δ)  $48 \text{ cm}^2$   
 E)  $56 \text{ cm}^2$

6) Ένα κομμάτι σπάγκου είναι διπλωμένο όπως δείχνει η εικόνα. Κόβουμε τον σπάγκο με μία κάθετη ψαλιδιά για να τον χωρίσουμε σε μικρότερα κομμάτια. Τώρα ένα από τα κομμάτια έχει μήκος 9 cm και ένα δεύτερο έχει μήκος 4 cm. Ποιο από τα παρακάτω δεν μπορεί να είναι το αρχικό μήκος του σπάγκου; (Η ψαλιδιά στο σχήμα δεν είναι στην ακριβή της θέση).



- A) 52 cm      B) 68 cm  
 Γ) 72 cm      Δ) 88 cm  
 E) όλα τα προηγούμενα είναι πιθανά

7) Ποιος είναι ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός  $n$  με  $n^{200} < 5^{300}$ ;

- A) 5      B) 6      Γ) 8      Δ) 11      E) 12

8) Ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιεί την ισότητα  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$ , για τα  $x$  που έχουν νόημα οι παραστάσεις;

A)  $f(x) = \frac{2}{x}$       B)  $f(x) = \frac{1}{x+1}$       Γ)  $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$       Δ)  $f(x) = \frac{1}{x}$       Ε)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

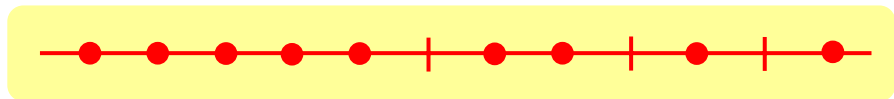
9) Ένας πραγματικός αριθμός  $x$  ικανοποιεί τις ανισότητες  $x^3 < 64 < x^2$ . Ποια από τις παρακάτω είναι σίγουρα σωστή;

A)  $0 < x < 64$       B)  $-8 < x < 4$       Γ)  $x > 8$       Δ)  $-4 < x < 8$       Ε)  $x < -8$

10) Στην πραγματική ευθεία είναι σημειωμένοι με ● εννέα φυσικοί αριθμοί (βλέπε την εικόνα).

Γνωρίζουμε για αυτούς ότι

α) είναι μεγαλύτεροι από τον 93 και μικρότεροι από



τον 112 και β) ακριβώς τρεις είναι πολλαπλάσια του 4.

Ποιος είναι ο μεγαλύτερος από αυτούς τους 9 αριθμούς;

A) 100      B) 102      Γ) 104      Δ) 106      Ε) 108

#### Ερωτήσεις 4 πόντων:

11) Η ηλικία μου είναι διψήφιος αριθμός ο οποίος είναι δύναμη του 5. Η ηλικία του θείου μου είναι διψήφιος αριθμός ο οποίος είναι δύναμη του 2. Το άθροισμα των (τεσσάρων) ψηφίων των ηλικιών μας είναι περιττός αριθμός. Πόσο είναι το γινόμενο των ψηφίων των ηλικιών μας;

A) 240      B) 2010      Γ) 60      Δ) 50      Ε) 300

12) Από ένα γκρουπ 100 τουριστών, οι 90 επισκέφθηκαν το Αρχαιολογικό Μουσείο, οι 90 το Βυζαντινό Μουσείο και οι 90 το Λαογραφικό Μουσείο. Ποιος είναι ο μικρότερος δυνατός αριθμός τουριστών που επισκέφθηκαν και τα τρία αυτά αξιοθέατα;

A) 90      B) 85      Γ) 80      Δ) 75      Ε) 70

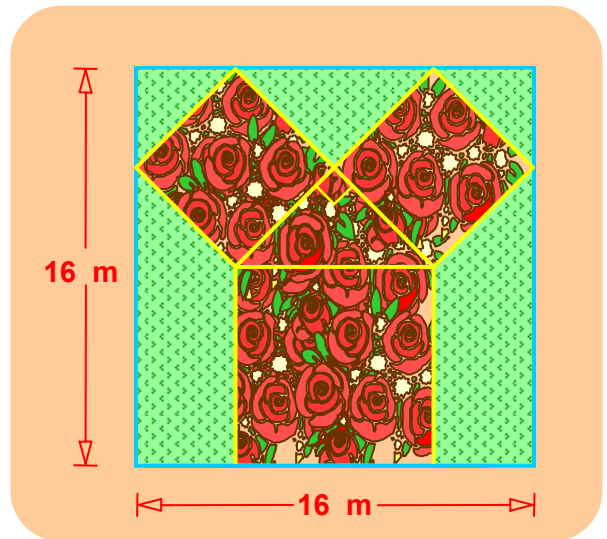
13) Ποιο είναι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης  $|x| + |x - 3| > 3$ ;

A)  $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$       B)  $(-3, 3)$       Γ)  $(-\infty, -3)$   
 Δ)  $(-3, +\infty)$       Ε) όλοι οι πραγματικοί αριθμοί

14) Τα παιδιά μιας τάξης έχουν στη τσάντα τους, το καθένα, από 1 έως 5 βιβλία. Ο μέσος όρος των βιβλίων όλων μαζί των μαθητών της τάξης είναι 4. Ο μέσος όρος των βιβλίων των αγοριών είναι 3,6 και των κοριτσιών είναι 4,2. Ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό για τα παιδιά της τάξης αυτής;

- A) Τα αγόρια είναι διπλάσια από τα κορίτσια
- B) Τα αγόρια είναι τετραπλάσια από τα κορίτσια
- Γ) Τα κορίτσια είναι διπλάσια από τα αγόρια
- Δ) Τα κορίτσια είναι τετραπλάσια από τα αγόρια
- E) Τα κορίτσια είναι όσα τα αγόρια

15) Οι εικόνα δείχνει έναν τετράγωνο κήπο πλευράς 16 μέτρων. Τα τριαντάφυλλα έχουν φυτευτεί σε μια περιοχή η οποία (βλέπε το σχήμα) αποτελείται από ένα ορθογώνιο τρίγωνο και τα τρία τετράγωνα στις πλευρές του. Πόσο είναι το εμβαδόν της περιοχής του κήπου με τα τριαντάφυλλα;

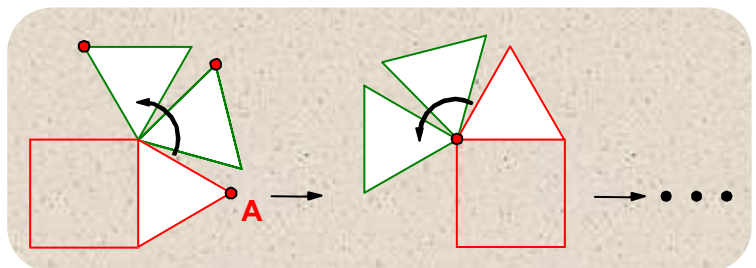


- A)  $114 \text{ m}^2$     B)  $130 \text{ m}^2$     Γ)  $144 \text{ m}^2$
- Δ)  $160 \text{ m}^2$     E)  $186 \text{ m}^2$

16) Κάποια μέρα η μύτη του Πινόκιο είχε μήκος 8 cm. Κάθε φορά που ο Πινόκιο έλεγε την αλήθεια, η μύτη μικραίνει κατά 2 cm ενώ κάθε φορά που έλεγε ψέματα η μύτη διπλασιαζόταν σε μήκος. Εκείνη την ημέρα ο Πινόκιο είπε δύο φορές την αλήθεια και δύο φορές ψέματα (αλλά όχι κατ' ανάγκη με αυτή την σειρά). Ποιο είναι το μεγαλύτερο δυνατό μήκος που θα μπορούσε να φτάσει η μύτη του εκείνη την μέρα;

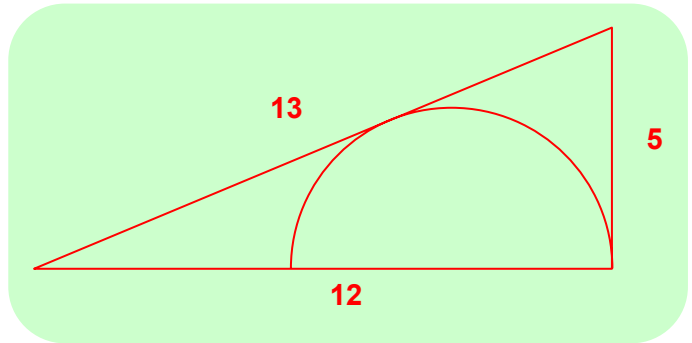
- A) 22 cm    B) 24 cm    Γ) 26 cm    Δ) 28 cm    E) 30 cm

17) Ένα ισόπλευρο τρίγωνο περιστρέφεται γύρω από ένα τετράγωνο πλευράς 1, όπως στην εικόνα. Πόσο είναι το μήκος της καμπύλης που θα διαγράψει το σημείο A όταν το σημείο αυτό επιστρέψει για πρώτη φορά στην αρχική του θέση;



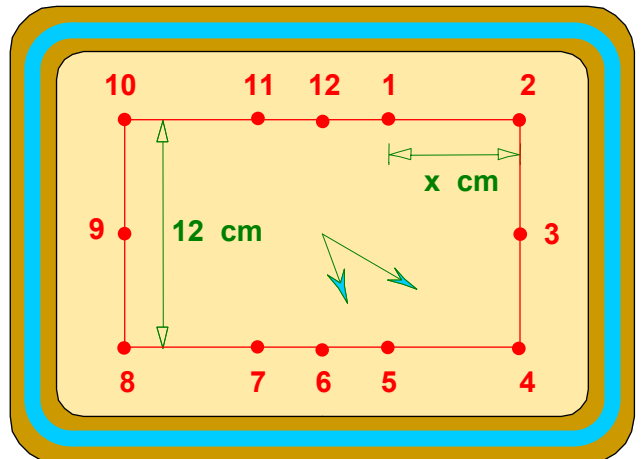
- A)  $4\pi$     B)  $\frac{19\pi}{6}$     Γ)  $8\pi$     Δ)  $\frac{14\pi}{3}$     E)  $\frac{21\pi}{2}$

18) Η εικόνα δείχνει ένα ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές 5, 12 και 13 και ένα ημικύκλιο που εφάπτεται στις πλευρές του. Πόση είναι η ακτίνα του ημικυκλίου;



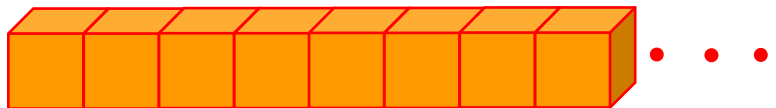
- A)  $\frac{7}{3}$       B)  $\frac{10}{3}$       Γ)  $\frac{12}{3}$   
 Δ)  $\frac{13}{3}$       E)  $\frac{17}{3}$

19) Ένα ρολόι έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Πόση είναι η απόσταση  $x$ , πάνω στο καντράν, μεταξύ των ψηφίων 1 και 2, αν η απόσταση μεταξύ των 8 και 10 είναι 12 cm;



- A)  $3\sqrt{3}$       B)  $2\sqrt{3}$       Γ)  $4\sqrt{3}$   
 Δ)  $2 + \sqrt{3}$       E)  $12 - 3\sqrt{3}$

20) Ένα καγκουρό θέλει να φτιάξει μία μακρόστενη κατασκευή από ζάρια (στα ζάρια το άθροισμα των αριθμών στις απέναντι έδρες είναι 7). Ένα τμήμα της κατασκευής φαίνεται στο σχήμα. Επιτρέπεται να κολλήσει δύο έδρες μόνο αν έχουν τον ίδιο αριθμό. Θέλει το άθροισμα όλων των αριθμών στην εξωτερική μεριά της κατασκευής (πάνω, κάτω, μπρος, πίσω, δεξιά, αριστερά) να είναι 220. Πόσα ζάρια θα χρειαστεί;



- A) 7      B) 8      Γ) 14      Δ) 15      E) κατασκευή με άθροισμα 220 είναι αδύνατη

### Ερωτήσεις 4 πόντων:

21) Στον πίνακα είναι γραμμένοι 20 αριθμοί. Σχηματίζουμε όλα τα δυνατά γινόμενα οποιωνδήποτε δύο από αυτούς (το γινόμενο των  $\alpha$  και  $\beta$  το μετράμε μία φορά, όχι ως  $\alpha\beta$  και  $\beta\alpha$ ). Αν ακριβώς 77 από αυτά τα γινόμενα είναι αρνητικά, πόσοι από τους αρχικούς αριθμούς είναι ίσοι με 0;

- A) 1      B) 2      Γ) 3      Δ) 7      E) 11

**22)** Έστω  $N$  ο πιο μικρός φυσικός αριθμός (γραμμένος στο δεκαδικό σύστημα) ο οποίος έχει την ιδιότητα: Η προσθήκη του ψηφίου 1 στην αρχή του τον κάνει 9 φορές μεγαλύτερο.

Ποιο από τα παρακάτω αληθεύει για τον  $N$ ;

- A)**  $N \leq 27$                       **B)**  $27 < N \leq 81$                       **Γ)**  $81 < N \leq 243$   
**Δ)**  $243 < N \leq 729$                       **E)** δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός

**23)** Οι αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  και  $\varepsilon$  είναι οι 2, 3, 4, 5 και 6 αλλά όχι κατ' ανάγκη με αυτή τη σειρά.

Αν  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \delta^2 + \varepsilon^2$ , με πόσο ισούται το  $\alpha + \beta + \gamma$ ;

- A)** 7                      **B)** 8                      **Γ)** 9                      **Δ)** 10                      **E)** 11

**24)** Ένα περίεργο κομπιουτεράκι μπορεί να κάνει μόνο δύο ειδών πράξεις με κλάσματα. α) Να αυξήσει τον αριθμητή του κατά 8 μονάδες και β) να αυξήσει τον παρονομαστή του κατά 7 μονάδες.

Ξεκινώντας από το κλάσμα  $\frac{7}{8}$  και κάνοντας διαδοχικά, με κάποια σειρά, τις παραπάνω πράξεις  $N$

φορές συνολικά, κατέληξε σε κλάσμα ίσο με το  $\frac{7}{8}$ . Ποια είναι η μικρότερη δυνατή τιμή του  $N$ ;

- A)** 56                      **B)** 81                      **Γ)** 109                      **Δ)** 113  
**E)** Ποτέ δε θα βρει ξανά κλάσμα ίσο με  $\frac{7}{8}$

**25)** Ο Πυθαγόρας έγραψε στον πίνακα διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς αρχίζοντας από το 1. Μετά πρόσθεσε τους αριθμούς που έγραψε. Όμως έκανε λάθος και κάποιον αριθμό τον πρόσθεσε δύο φορές. Αν το άθροισμα που βρήκε ήταν 220, ποιον αριθμό πρόσθεσε δύο φορές;

- A)** 10                      **B)** 20                      **Γ)** 30  
**Δ)** 155                      **E)** κανένα από τα προηγούμενα

**26)** Πόσες αναδιατάξεις  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  του συνόλου  $\{1, 2, 3, 4\}$  υπάρχουν έτσι ώστε η παράσταση  $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$  να είναι πολλαπλάσιο του 3; (Σημείωση: Αναδιάταξη σημαίνει διευθέτηση των  $\{1, 2, 3, 4\}$  με οποιαδήποτε σειρά, όπως (2, 1, 3, 4), (3, 4, 2, 1), (1, 2, 3, 4) και λοιπά, οι οποίες θεωρούνται διαφορετικές.)

- A)** 8                      **B)** 12                      **Γ)** 14                      **Δ)** 16                      **E)** 24

27) Στον πίνακα είναι ζωγραφισμένα το γράφημα της παραβολής  $y = x^2$  και 2012 ευθείες παράλληλες της  $y = x$ , κάθε μία από τις οποίες τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία. Πόσο είναι το άθροισμα των τετμημένων όλων αυτών των κοινών σημείων;

- A) 0      B) 1      Γ) 1006      Δ) 2012      E) δεν μπορούμε να ξέρουμε

28) Γράφουμε διαδοχικά μία ακολουθία αριθμών που ξεκινά ως 1, 1, 0, 1, -1, ... Οι δύο πρώτοι είναι ο  $a_1 = 1$  και ο  $a_2 = 1$ . Ο τρίτος όρος είναι ίσος με την διαφορά των δύο προηγούμενων του, δηλαδή  $a_3 = a_1 - a_2$ . Ο τέταρτος είναι ίσος με το άθροισμα των δύο προηγούμενων του,  $a_4 = a_2 + a_3$ . Κατόπιν συνεχίζουμε με το ίδιο μοτίβο, δηλαδή  $a_5 = a_3 - a_4$ ,  $a_6 = a_4 + a_5$ , και λοιπά (εναλλάξ διαφορά και άθροισμα). Πόσο είναι το άθροισμα των 100 πρώτων όρων της ακολουθίας;

- A) 0      B) 3      Γ) -21      Δ) 100      E) -1

29) Ο Διόφαντος επέλεξε δύο αριθμούς X και Y από το σύνολο  $\{1, 2, 3, \dots, 17\}$ . Το γινόμενο XY ισούται με το άθροισμα των υπόλοιπων 15 αριθμών του συνόλου. Πόση είναι η τιμή του  $X + Y$ ;

- A) 23      B) 25      Γ) 27      Δ) 29      E) δεν μπορούμε να ξέρουμε

30) Κάθε γάτα στη Χώρα των Θαυμάτων είναι είτε σοφή είτε τρελή. Αν μία σοφή γάτα βρεθεί σε ένα δωμάτιο με 3 τρελές, τότε τρελαίνεται και αυτή. Αν μία τρελή γάτα βρεθεί σε ένα δωμάτιο με τρεις σοφές, τότε αυτές καταλαβαίνουν ότι είναι τρελή. Μια μέρα 3 γάτες μπήκαν σε ένα άδειο δωμάτιο. Μετά μπήκε η 4<sup>η</sup> γάτα και λίγο αργότερα βγήκε η 1<sup>η</sup>. Μετά μπήκε η 5<sup>η</sup> γάτα και λίγο αργότερα βγήκε η 2<sup>η</sup>, και ούτω καθεξής μέχρι την 12<sup>η</sup>. Όταν μπήκε η 12<sup>η</sup> γάτα συνέβη για πρώτη φορά ότι οι τρεις από τις γάτες (όχι κατ' ανάγκη οι τρεις ήδη μέσα στο δωμάτιο) κατάλαβαν ότι η τέταρτη ήταν τρελή. Πόσες ήταν οι σοφές γάτες όταν τέλειωσε η διαδικασία αν ξέρουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο τρελές;

- A) 5 σοφές      B) 6 σοφές      Γ) 7 σοφές  
 Δ) 8 σοφές      E) κανένα από τα προηγούμενα

