

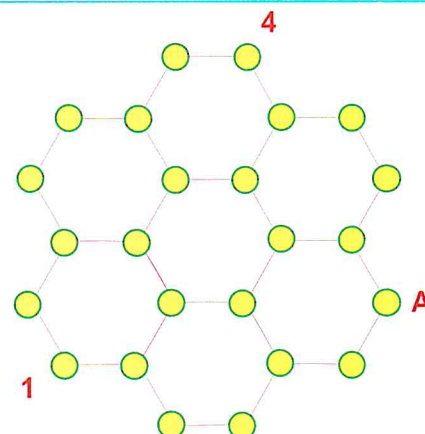
Θέματα Καγκουρό 2011

Επίπεδο: 5

(για μαθητές της Β' και Γ' τάξης Λυκείου)

Ερωτήσεις 3 πόντων:

1) Το διπλανό σχήμα αποτελείται από κουκίδες και ευθύγραμμα τμήματα. Σε κάθε κουκίδα υπάρχει ένας αριθμός. Το άθροισμα των δύο αριθμών στα άκρα κάθε ευθύγραμμου τμήματος είναι το ίδιο σε όλες τις περιπτώσεις. Δύο από τους αριθμούς έχουν ήδη τοποθετηθεί. Ποιος αριθμός βρίσκεται στην κουκίδα Α;



- A) 1 B) 3 Γ) 4 Δ) 5 Ε) 24

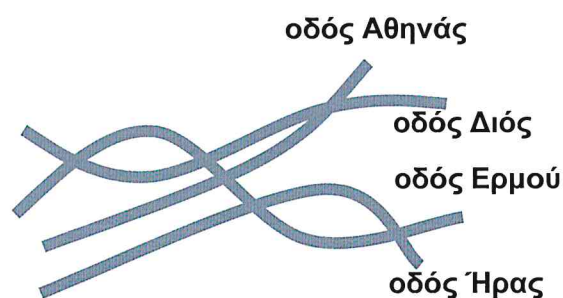
2) Τρεις αθλητές αγωνίστηκαν σε έναν μαραθώνιο δρόμο. Στο ξεκίνημα του αγώνα προηγήθηκε ο Αντώνης, αμέσως μετά ακολούθησε ο Βασίλης και τρίτος ήταν ο Γιώργος. Από κει και πέρα, κατά την διάρκεια του αγώνα, ο Αντώνης και ο Βασίλης προσπέρασαν ο ένας τον άλλο 9 φορές, ο Βασίλης και ο Γιώργος προσπέρασαν ο ένας τον άλλο 10 φορές και ο Αντώνης και ο Γιώργος 11 φορές. Με ποια σειρά τερμάτισαν οι αθλητές;

- A) Αντώνης, Βασίλης, Γιώργος B) Βασίλης, Γιώργος, Αντώνης
 Γ) Γιώργος, Αντώνης, Βασίλης Δ) Γιώργος, Βασίλης, Αντώνης
 Ε) Βασίλης, Αντώνης, Γιώργος

3) Αν $2^x = 15$ και $15^y = 32$, τότε το xy ισούται με

- A) 5 B) $\log_2 15 + \log_5 32$ Γ) $\log_2 47$ Δ) 7 Ε) $\sqrt{47}$

4) Η Δανάη ζωγράφισε πρόχειρα ένα χάρτη που δείχνει το χωριό της. Στο χωριό υπάρχουν 4 δρόμοι οι οποίοι διασταυρώνονται σε 6 σημεία. Ο χάρτης της Δανάης δείχνει ότι όλοι οι δρόμοι έχουν καμπύλες αλλά στην πραγματικότητα οι τρεις είναι ευθείες και μόνο ο τέταρτος έχει καμπύλες. Ποιος από τους δρόμους του χωριού έχει τις καμπύλες;



- A) η οδός Αθηνάς B) η οδός Διός Γ) η οδός Ερμού
 Δ) η οδός Ήρας Ε) δεν μπορούμε να συμπεράνουμε

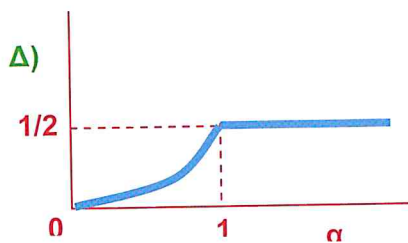
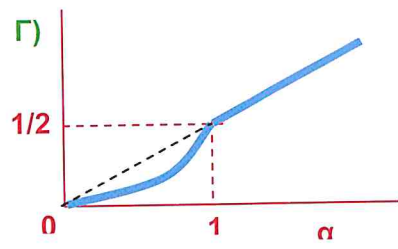
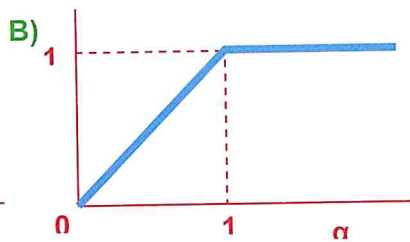
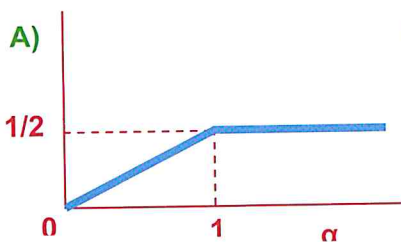
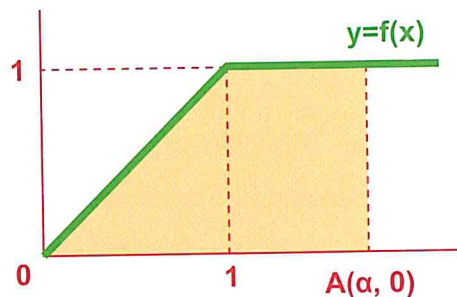
5) Γράφουμε στη σειρά αρχίζοντας από τον μεγαλύτερο και πηγαίνοντας προς τον μικρότερο, όλους τους τετραψήφιους αριθμούς που το άθροισμά των ψηφίων τους είναι 4. Σε ποια θέση βρίσκεται ο 2011;

- A) στην 6η B) στην 7η Γ) στην 8η Δ) στην 9η Ε) στην 10η

6) Ο αριθμός $N = \frac{111\dots111}{100 \text{ ψηφία}}$ αποτελείται από 100 ψηφία, όλα ίσα με 1. Πόσο είναι το άθροισμα των ψηφίων του γινομένου $2011 \cdot N$;

- A) 380 B) 400 Γ) 410 Δ) 420 Ε) κανένα από τα προηγούμενα

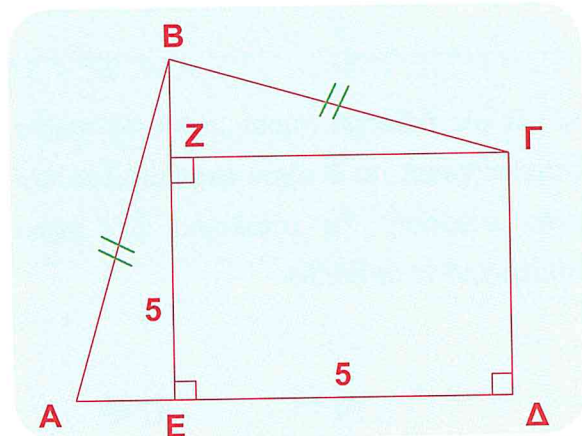
7) Η εικόνα δείχνει το γράφημα μίας καμπύλης $y = f(x)$. Για τυχαίο σημείο $A(\alpha, 0)$, όπου $\alpha \geq 0$, ορίζουμε ως $E(\alpha)$ το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ του γραφήματος της $y = f(x)$, του άξονα των x και της ευθείας $x = \alpha$. Τότε το γράφημα της $y = E(\alpha)$ είναι



Ε) Κανένα από τα προηγούμενα

8) Πόσο είναι το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ αν $AB = B\Gamma$, $\Gamma\Delta E Z$ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και $BE = \Gamma Z = 5$.

- A) 20 B) 22,5 Γ) 25
Δ) 27,5 Ε) 30



9) Ο Διόφαντος έγραψε στον πίνακα όλους τους περιττούς αριθμούς από τον 1 μέχρι τον 2011. Μετά έσβησε όλα τα πολλαπλάσια του 3. Πόσοι αριθμοί έμειναν γραμμένοι στον πίνακα;

- A) 335 B) 336 Γ) 671 Δ) 1005 Ε) 1006

10) Σε μία τάξη με 20 μαθητές υπάρχει τουλάχιστον ένα αγόρι. Είναι γνωστό ότι αν πάρουμε οποιοσδήποτε δύο μαθητές της τάξης, τότε τουλάχιστον το ένα είναι κορίτσι. Πόσα κορίτσια έχει η τάξη;

- A) 1 B) 9 Γ) 10 Δ) 11 Ε) 19

Ερωτήσεις 4 πόντων:

11) Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο χωρίζεται σε τρία μικρότερα ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Το ένα από αυτά έχει διαστάσεις 7×11 και το δεύτερο 4×8 . Ποιες είναι οι διαστάσεις του τρίτου ορθογωνίου παραλληλογράμμου αν έχει το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν;

- A) 1×11 B) 3×4 Γ) 3×8 Δ) 7×8 Ε) 7×11

12) Ο Ερατοσθένης θέλει να γράψει από έναν φυσικό αριθμό στα τετραγωνάκια του διπλανού 3×3 πίνακα, έτσι ώστε το άθροισμα των αριθμών σε κάθε 2×2 τμήμα του να ισούται με 10. Μερικοί αριθμοί είναι ήδη γραμμένοι. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς θα μπορούσε να είναι το άθροισμα των πέντε αριθμών που λείπουν;

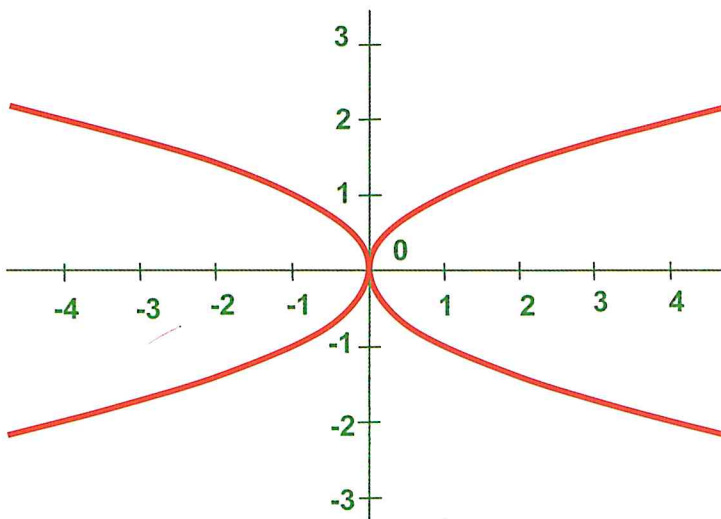
	2	
1		3
	4	

- A) 9 B) 10 Γ) 12 Δ) 13
 Ε) Κανένας από τους προηγούμενους δεν μπορεί να είναι το άθροισμα

13) Σε μία εκδρομή πήραν μέρος 48 παιδιά. Τα 6 από αυτά είχαν ακριβώς έναν αδελφό ή αδελφή στην εκδρομή, τα 9 είχαν ακριβώς δύο αδέρφια στην εκδρομή και τα 4 είχαν ακριβώς 3 αδέρφια στην εκδρομή. Τα υπόλοιπα δεν είχαν αδέρφια στην εκδρομή. Από πόσες οικογένειες προέρχονταν τα παιδιά;

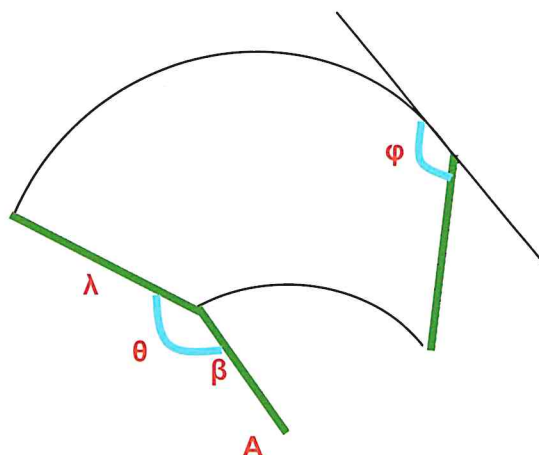
- A) 19 B) 25 Γ) 31 Δ) 36 Ε) 48

14) Πόσα από τα γραφήματα των συναρτήσεων $y = x^2$, $y = -x^2$, $y = +\sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = +\sqrt{-x}$, $y = -\sqrt{-x}$, $y = +\sqrt{|x|}$, $y = -\sqrt{|x|}$ περιέχονται στο διπλανό σχήμα;



- A) κανένα B) 2 Γ) 4 Δ) 6 Ε) 8

15) Ο υαλοκαθαριστήρας ενός αυτοκινήτου αποτελείται από δύο στελέχη, την λεπίδα λ και την βάση β , που έχουν ίσα μήκη και είναι συνδεδεμένα υπό σταθερή γωνία θ . Καθώς περιστρέφεται γύρω από ένα σημείο A ο υαλοκαθαριστήρας καθαρίζει μία περιοχή όπως στο σχήμα. Πόση είναι η γωνία φ μεταξύ της λεπίδας και της εφαπτομένης ϵ του παραπάνω τόξου της περιοχής όταν ο υαλοκαθαριστήρας βρεθεί στο δεξί του άκρο;



- A) $\frac{3\pi - \theta}{2}$ B) $\pi - \frac{\theta}{2}$ Γ) $\frac{3\pi}{2} - \theta$
 Δ) $\frac{\pi}{2} + \theta$ Ε) $\pi + \frac{\theta}{2}$

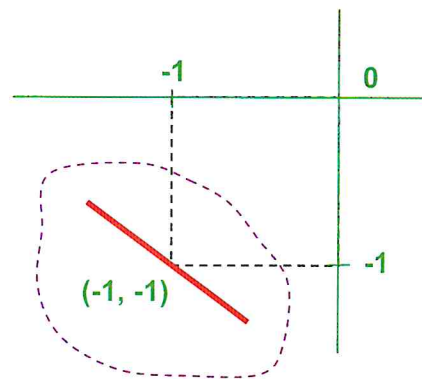
16) Στα τετραγωνάκια ενός 5×5 πίνακα έχουν τοποθετηθεί οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 5. Κάθε αριθμός εμφανίζεται ακριβώς μία φορά σε κάθε γραμμή, σε κάθε στήλη και σε κάθε μία από τις δύο διαγωνίους του πίνακα. Μερικοί από τους αριθμούς φαίνονται στο διπλανό διάγραμμα. Ποιος αριθμός μπαίνει στο τετράγωνο με το ερωτηματικό;

1	2			3
4				
		;		
				2

- A) 1 B) 2 Γ) 3 Δ) 4 Ε) 5

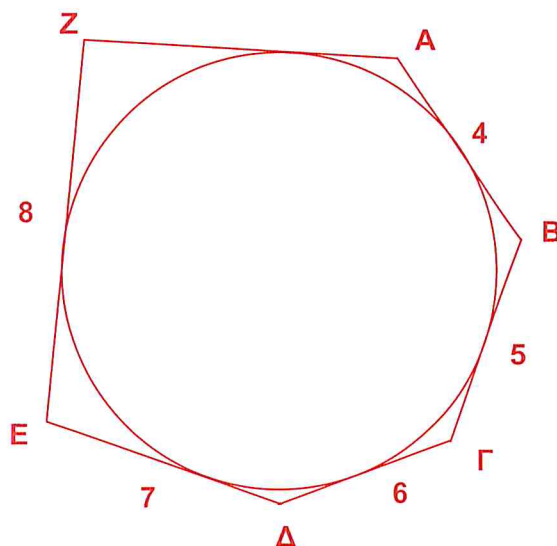
17) Στο σχήμα φαίνεται ένα τμήμα του γραφήματος μιας ευθείας $y = ax + \beta$. Ποιο από τα παρακάτω δεν ισχύει;

- A) $\alpha < 0$ B) $1 + \beta < 0$ Γ) $\alpha > \beta$ Δ) $\alpha + \beta > 0$
 E) $2\alpha + \beta < 0$



18) Οι πλευρές AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ και ΖΑ ενός εξαγώνου εφάπτονται σε έναν κύκλο. Τα μήκη των AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ και ΕΖ είναι 4, 5, 6, 7 και 8, αντίστοιχα. Πόσο είναι το μήκος ΖΑ;

- A) 9 B) 8 Γ) 7
 Δ) 6 E) Άλλη απάντηση



19) Αν $\alpha = \sqrt{2011} + \sqrt{2001}$, ποιο από τα παρακάτω ισούται με $\sqrt{2011} - \sqrt{2001}$;

- A) $10 - \alpha$ B) $\frac{1}{\alpha}$ Γ) $\frac{10}{\alpha}$ Δ) $\frac{\alpha}{10}$ E) $10 + \alpha$

20) Έχουμε τέσσερις θετικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $0 < \alpha < \beta < \gamma < \delta$. Μας ζητάνε να αυξήσουμε τον έναν από αυτούς κατά μία μονάδα έτσι ώστε, μετά την αύξηση, το γινόμενο των τεσσάρων αριθμών να είναι όσο γίνεται μικρότερο. Ποιόν από τους τέσσερις αριθμούς πρέπει να αυξήσουμε;

- A) τον α B) τον β Γ) τον γ Δ) τον δ E) εξαρτάται από τους αρχικούς αριθμούς

Ερωτήσεις 5 πόντων:

21) Στον πίνακα είναι γραμμένοι κάποιοι αριθμοί που είναι όλοι διαφορετικοί μεταξύ τους. Οι 30 από τους αριθμούς αυτούς είναι πολλαπλάσια του 2, οι 20 είναι πολλαπλάσια του 3 και οι 10 είναι πολλαπλάσια του 6. Πόσοι το λιγότερο αριθμοί είναι γραμμένοι στον πίνακα;

- A) 30 B) 40 Γ) 53 Δ) 54 Ε) 60

22) Μια αριθμητική πρόοδος περιέχει μόνο φυσικούς αριθμούς. Είναι γνωστό ότι περιέχει όλους τους όρους της αριθμητικής προόδου 5, 20, 35, ... και, επίσης, όλους τους όρους της αριθμητικής προόδου 35, 61, 87, Ποια είναι η διαφορά της αρχικής αριθμητικής προόδου;

- A) 1 B) 3 Γ) 5 Δ) 26 Ε) Κανένα από τα προηγούμενα

23) Σε ένα χαρτί είναι γραμμένοι οι 2011 αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{2011}$. Είναι γνωστό ότι $\alpha_1 = 2011$,

$$\alpha_2 = \frac{1}{1-\alpha_1}, \alpha_3 = \frac{1}{1-\alpha_2} \text{ και, γενικά, } \alpha_{n+1} = \frac{1}{1-\alpha_n} \quad (n \geq 1). \text{ Με τι ισούται ο } \alpha_{2011};$$

- A) 2011 B) $-\frac{1}{2010}$ Γ) $\frac{2010}{2011}$ Δ) 1 Ε) -2011

24) Ποια είναι η τιμή της παράστασης $\sqrt{1+2008\sqrt{1+2009 \cdot 2011}}$;

- A) 2008 B) 2009 Γ) 2010 Δ) 2011 Ε) 2012

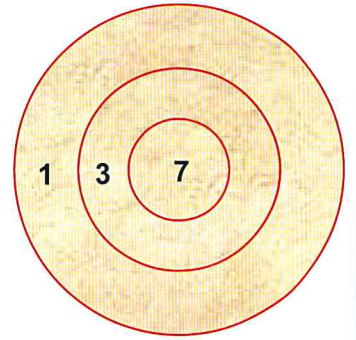
25) Μία αεροπορική εταιρεία δεν χρεώνει το κόστος μεταφοράς των αποσκευών αν το βάρος τους είναι κάτω από κάποιο όριο. Το όριο αυτό διπλασιάζεται για δύο άτομα της ίδιας οικογένειας που ταξιδεύουν μαζί. Οι βαλίτσες του κύριου και της κυρίας Καγκουρό ζύγιζαν 60 κιλά και χρειάστηκε να πληρώσουν 3€. Οι βαλίτσες της κυρίας Καμήλα ζύγιζαν επίσης 60 κιλά και χρειάστηκε να πληρώσει 10,50€. Πόσο είναι το μέγιστο βάρος αποσκευών ενός ταξιδιώτη που δεν χρειάζεται με πληρώσει κόστος μεταφοράς;

- A) 10 κιλά B) 18 κιλά Γ) 20 κιλά Δ) 25 κιλά Ε) 39 κιλά

26) Στο πηλίκο $\frac{Κ \cdot Α \cdot Γ \cdot Κ \cdot Ο \cdot Υ \cdot Ρ \cdot Ο}{Κ \cdot Α \cdot Ν \cdot Ω}$, κάθε γράμμα παριστάνει ένα διαφορετικό ψηφίο από 1 έως 9. Ίδια γράμματα παριστάνουν το ίδιο ψηφίο. Αν το παραπάνω πηλίκο είναι φυσικός αριθμός, ποια είναι η μικρότερη δυνατή τιμή αυτού του φυσικού αριθμού; (οι κουκκίδες παριστάνουν πολλαπλασιασμό)

- A) 1 B) 2 Γ) 3 Δ) 5 Ε) 7

27) Ο Απόλλωνας έριξε 3 βέλη στον στόχο. Σε κάθε ρίψη κέρδιζε πόντους όπως δείχνει η εικόνα. Πόσα διαφορετικά συνολικά αποτελέσματα μπορεί να πάρει με αυτόν τον τρόπο;



- A) 4 B) 7 Γ) 9 Δ) 10 Ε) 11

28) Έστω α , β και γ φυσικοί αριθμοί μεγαλύτεροι ή ίσοι του 1 τέτοιοι ώστε $\alpha^2 = 2\beta^3 = 3\gamma^5$. Ποια είναι η μικρότερη δυνατή τιμή που μπορεί να έχει ο γ ;

- A) 36 B) 24 Γ) 12 Δ) 6 Ε) Κανένα από τα προηγούμενα

29) Αν α , β , γ πραγματικοί αριθμοί μεγαλύτεροι του 0 με $\alpha + \beta + \gamma = 7$ και

$$\frac{1}{\alpha + \beta} + \frac{1}{\beta + \gamma} + \frac{1}{\gamma + \alpha} = \frac{7}{10}$$

ποια είναι η τιμή του $\frac{\alpha}{\beta + \gamma} + \frac{\beta}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta}$;

- A) $\frac{19}{10}$ B) $\frac{17}{10}$ Γ) $\frac{9}{7}$ Δ) $\frac{3}{2}$ Ε) $\frac{10}{7}$

30) Αν n φυσικός αριθμός με $n \geq 2$, συμβολίζουμε με $p(n)$ τον μεγαλύτερο πρώτο αριθμό που είναι μικρότερος ή ίσος του N (π.χ. $p(2)=2$, $p(10)=7$). Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση

$$p(n) + p(n + 1) = p(2n + 1);$$

- A) καμία B) μία Γ) δύο Δ) τρεις
Ε) περισσότερες από τρεις

