

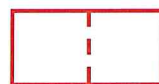
## Θέματα Καγκουρό 2010

Επίπεδο: 5

(για μαθητές της Β' και Γ' τάξης Λυκείου)

## Ερωτήσεις 3 πόντων:

1) Το πρώτο σχήμα δεξιά είναι τετράγωνο πλευράς 1 cm. Τα επόμενα αποτελούνται, αντίστοιχα, από 2, 3, 4, ... (ένα παραπάνω τη φορά) παρόμοια τετράγωνα. Ποια είναι η περίμετρος του εκατοστού σχήματος;



Α) 101 cm

Β) 202 cm

Γ) 204 cm

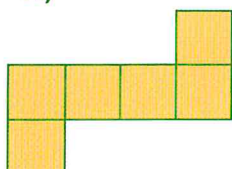
Δ) 301 cm

Ε) 400 cm

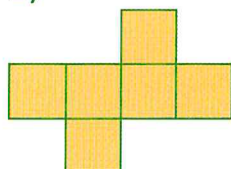
2) Ποιο από τα παρακάτω αναπτύγματα δεν είναι το ανάπτυγμα κύβου;



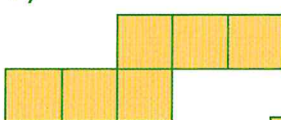
Α)



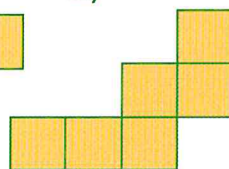
Β)



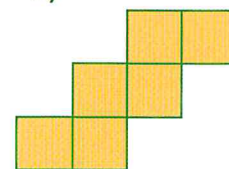
Γ)



Δ)



Ε)



3) Δύο άδεια κυβικά δοχεία έχουν εμβαδόν βάσης ίσο με  $1\text{dm}^2$  και  $4\text{dm}^2$ , αντίστοιχα. Θέλουμε να γεμίσουμε το μεγάλο δοχείο με νερό, το οποίο μεταφέρουμε από την πηγή χρησιμοποιώντας το μικρό δοχείο. Πόσες φορές πρέπει να πάμε στην πηγή;

Α) 2 φορές

Β) 4 φορές

Γ) 6 φορές

Δ) 8 φορές

Ε) 16 φορές

4) Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί υπάρχουν που είναι πολλαπλάσια του 5 και των οποίων τα ψηφία είναι όλα περιττοί αριθμοί; (Οι επαναλήψεις ψηφίων επιτρέπονται.)

Α) 900

Β) 625

Γ) 250

Δ) 125

Ε) 100

5) Μία καθηγήτρια είπε ότι όλα τα παιδιά της τάξης της ήσαν 16 χρονών ή παραπάνω. Μετά όμως κατάλαβε ότι έκανε λάθος. Ποιο από τα παρακάτω είναι σίγουρα σωστό;

Α) Όλα τα παιδιά της τάξης είναι ακριβώς 16 χρονών

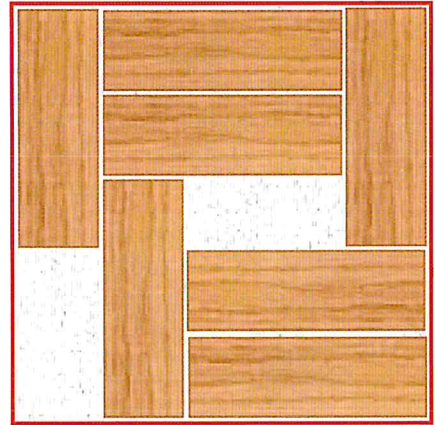
Β) Όλα τα παιδιά της τάξης είναι παραπάνω από 16 χρονών

Γ) Όλα τα παιδιά της τάξης είναι κάτω από 16 χρονών

Δ) Μερικά από τα παιδιά της τάξης είναι κάτω από 16 χρονών

Ε) Υπάρχει παιδί στην τάξη που είναι 17 χρονών ή παραπάνω

6) Σε ένα κουτί διαστάσεων  $5 \times 5$  υπάρχουν επτά πλακάκια διαστάσεων  $3 \times 1$ . Θέλουμε να μετακινήσουμε τα πλακάκια μέσα στο κουτί (χωρίς να τα βγάλουμε έξω) ώστε να δημιουργηθεί χώρος για άλλο ένα πλακάκι. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός από πλακάκια που πρέπει να μετακινήσουμε;

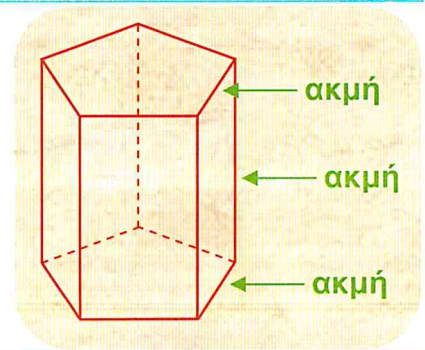


- A) 2                      B) 3                      Γ) 4  
 Δ) 5                      E) είναι αδύνατον

7) Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι ο μεγαλύτερος;

- A)  $20^{10}$               B)  $10^{20}$               Γ)  $1^{200}$               Δ)  $2^{100}$               E)  $100^2$

8) Ποιος από τους ακόλουθους αριθμούς ισούται με το πλήθος των ακμών κάποιου πρίσματος; (Στην εικόνα φαίνεται ένα πρίσμα, που όμως δεν είναι το ζητούμενο).

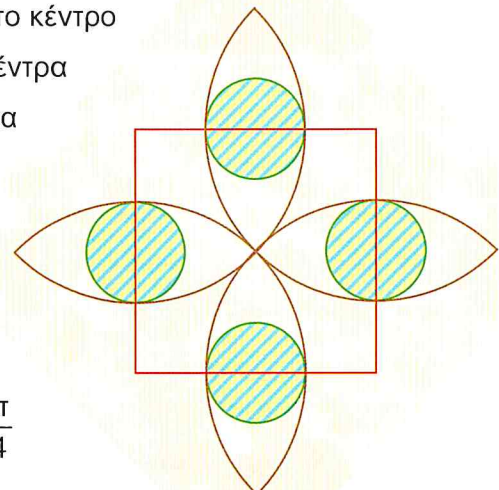


- A) 100                      B) 200                      Γ) 2008  
 Δ) 2009                      E) 2010

9) Πόσοι διψήφιοι αριθμοί υπάρχουν με ψηφίο δεκάδων το  $x$  και ψηφίο μονάδων το  $y$ , όπου τα  $x, y$  ικανοποιούν την σχέση  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 0$ ;

- A) 1                      B) 2                      Γ) 6                      Δ) 32                      E) κανένας

10) Η εικόνα δείχνει ένα τετράγωνο πλευράς 2. Τα ημικύκλια έχουν κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και διέρχονται από το κέντρο συμμετρίας του. Οι γραμμοσκιασμένοι κύκλοι έχουν κέντρα στις πλευρές του τετραγώνου και εφάπτονται στα αντίστοιχα ημικύκλια. Πόσο είναι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου;



- A)  $4(3 - 2\sqrt{2})\pi$               B)  $\sqrt{2}\pi$   
 Γ)  $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$                       Δ)  $\pi$                       E)  $\frac{\pi}{4}$

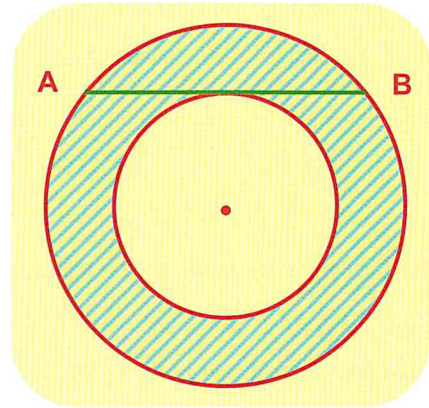
## Ερωτήσεις 4 πόντων:

11) Οι αριθμοί  $\sqrt{7}$ ,  $\sqrt[3]{7}$ ,  $\sqrt[9]{7}$  είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο επόμενος όρος της προόδου αυτής;

- A)  $\sqrt[9]{7}$       B)  $\sqrt[12]{7}$       Γ)  $\sqrt[5]{7}$       Δ)  $\sqrt[10]{7}$       Ε) 1

12) Η χορδή AB κύκλου εφάπτεται σε έναν ομόκεντρο εσωτερικό κύκλο. Αν  $AB=16$ , πόσο είναι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου;

- A)  $32\pi$       B)  $63\pi$   
 Γ)  $64\pi$       Δ)  $32\pi^2$   
 Ε) δεν μπορούμε να ξέρουμε



13) Δύο φυσικοί αριθμοί  $x$  και  $y$  ικανοποιούν  $2x = 5y$ . Μόνο ένας από τους παρακάτω αριθμούς θα μπορούσε να ισούται με  $x + y$ . Ποιος;

- A) 2011      B) 2010      Γ) 2009      Δ) 2008      Ε) 2007

14) Ο δάσκαλος έβαλε στο νου του έναν διψήφιο αριθμό. Οι μαθητές έγραψαν στο αριστερό μέρος του πίνακα όλους τους διψήφιους που είτε λήγουν σε 5 είτε είναι πολλαπλάσια του 7. Επίσης, έγραψαν στο δεξί μέρος του πίνακα όλους τους διψήφιους που είτε είναι πολλαπλάσια του 12 είτε είναι μικρότεροι από το 21. Ο αριθμός του δασκάλου ήταν γραμμένος και στα δύο μέρη του πίνακα. Ποιος από τους παρακάτω πέντε αριθμούς θα μπορούσε να είναι ο αριθμός του δασκάλου;

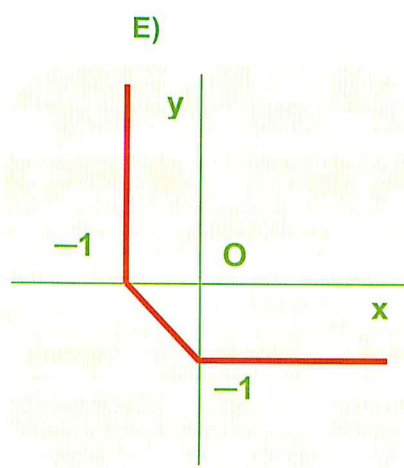
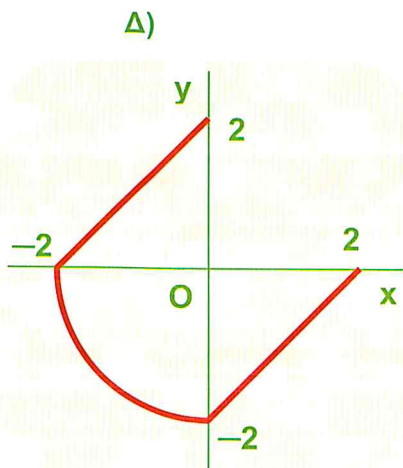
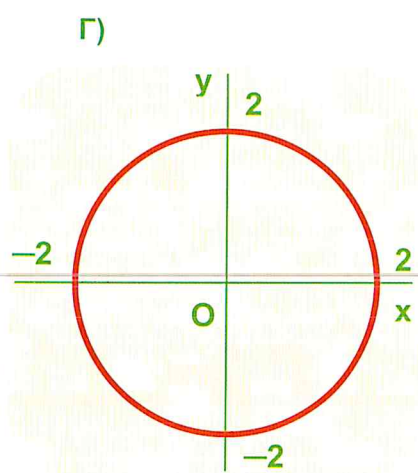
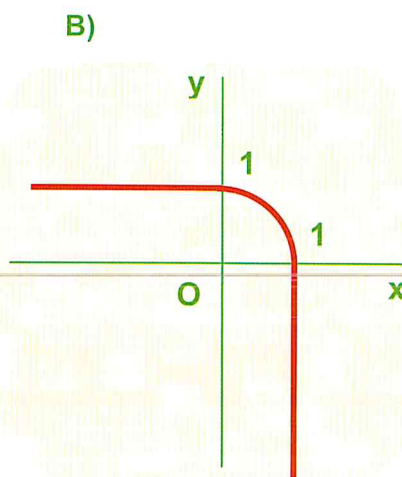
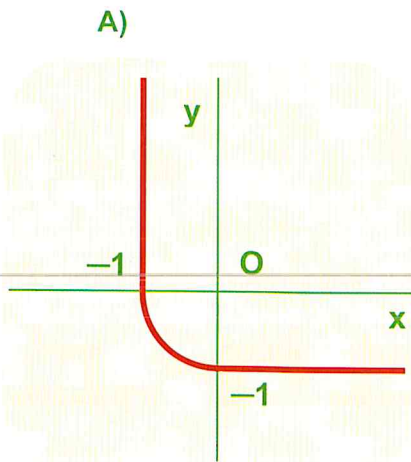
- A) 12      B) 25      Γ) 49      Δ) 60      Ε) 84

15) Σε μία σακούλα υπάρχουν τουλάχιστον πέντε χρωματιστές μπάλες. Οι μπάλες είναι μονόχρωμες, μπλε, πράσινου ή κόκκινου χρώματος. Υπάρχει τουλάχιστον μία μπάλα από κάθε ένα από τα τρία αυτά χρώματα. Ξέρουμε ότι αν κάποιος τραβήξει στη τύχη πέντε μπάλες τότε οπωσδήποτε α) δύο ή περισσότερες μπάλες έχουν κόκκινο χρώμα και β) υπάρχουν τουλάχιστον τρεις μπάλες του ίδιου χρώματος. Πόσες μπλε μπάλες υπάρχουν στη σακούλα;

- A) 1      B) 2      Γ) 3      Δ) 4      Ε) δεν μπορούμε να συμπεράνουμε

16) Ποιο από τα παρακάτω γραφήματα αντιστοιχεί στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης

$$(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4;$$



17) Πόσα ορθογώνια τρίγωνα μπορούν να σχηματιστούν ενώνοντας τρεις κορυφές κανονικού δεκατετράγωνου;

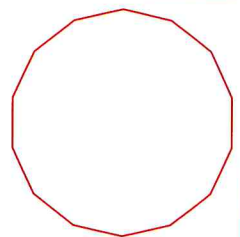
A) 2

B) 84

Γ) 88

Δ) 98

Ε) 168



18) Κάθε αστεράκι στην παρακάτω παράσταση αντικαθίσταται είτε με ένα “συν” (“+”) είτε με ένα “επί” (“·”). Αν N ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός που μπορεί να προκύψει από αυτή την διαδικασία, ποιος είναι ο μικρότερος πρώτος παράγοντας του N;

$$1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10$$

A) 2

B) 3

Γ) 5

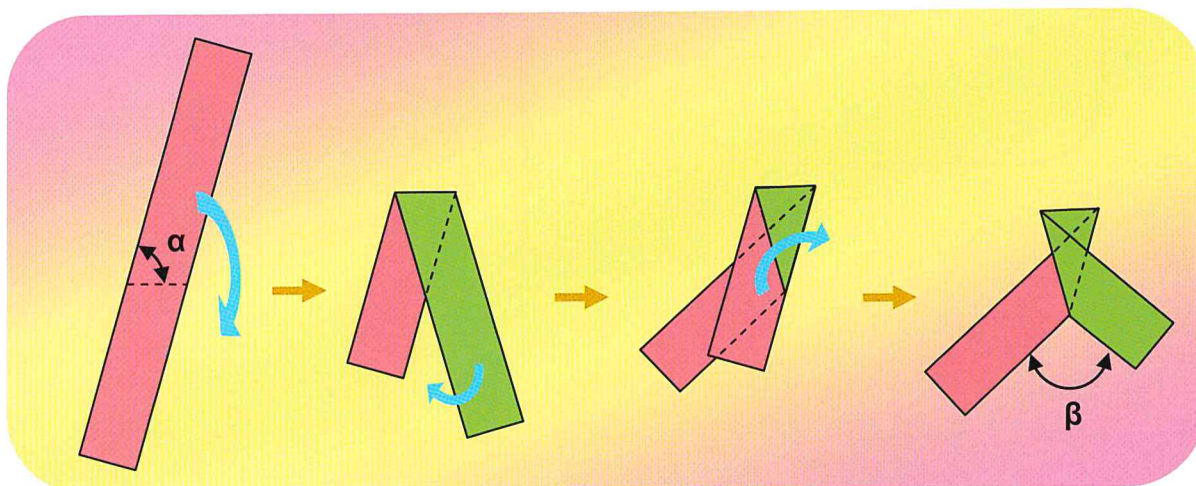
Δ) 7

Ε) κανένας από τους προηγούμενους

19) Το μήκος των πλευρών ενός τριγώνου είναι φυσικοί αριθμοί της μορφής  $13x$  και  $y$ , αντίστοιχα. Πόση είναι η περίμετρος του τριγώνου αν  $xy = 105$ ;

- A) 35      B) 39      Γ) 51      Δ) 69      Ε) 119

20) Μια μακρόστενη λουρίδα χαρτιού (με παράλληλες πλευρές) διπλώνεται τρεις φορές, όπως δείχνει το σχήμα. Πόσες μοίρες είναι η γωνία  $\hat{\beta}$  αν  $\hat{\alpha} = 70^\circ$ ;

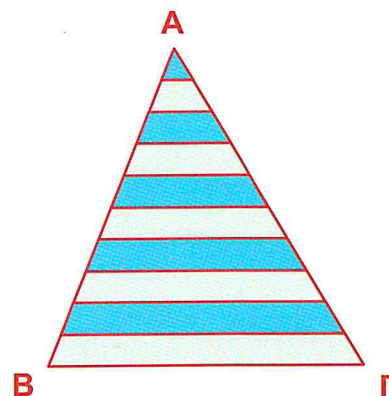


- A)  $140^\circ$       B)  $130^\circ$       Γ)  $120^\circ$       Δ)  $110^\circ$       Ε)  $100^\circ$

### Ερωτήσεις 5 πόντων:

21) Φέρνουμε ευθείες παράλληλες προς την βάση ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ, που χωρίζουν κάθε μία από τις δύο άλλες πλευρές σε δέκα ίσα τμήματα, αντίστοιχα. Τι ποσοστό του εμβαδού του τριγώνου είναι γαλάζιο;

- A) 42,5%      B) 45%      Γ) 46%  
 Δ) 47,5%      Ε) 50%



22) Σε έναν αγώνα δρόμου πήραν μέρος τριάντα αθλητές που τερμάτισαν όλοι και δεν υπήρχαν ισοπαλίες. Μετά το τέλος του αγώνα ο καθένας ρωτήθηκε σε ποια θέση τερμάτισε. Οι απαντήσεις που έδωσαν ήταν αριθμοί από το 1 ως το 30, αλλά δεν είπαν όλοι την αλήθεια. Αν το άθροισμα των απαντήσεων τους ήταν 355, ποιος είναι ο μικρότερος δυνατός αριθμός δρομέων που είπε ψέματα;

- A) 2      B) 3      Γ) 4      Δ) 5      Ε) δεν μπορούμε να ξέρουμε



23) Σε ένα δάσος υπάρχουν πέντε ζώα. Ονομάζονται Άλφα, Βήτα, Γάμμα, Δέλτα και Έψιλον. Κάποια από τα πέντε ζώα είναι ελέφαντες ενώ τα υπόλοιπα είναι καγκουρό. Οι ελέφαντες λένε πάντα ψέματα και τα καγκουρό λένε πάντα την αλήθεια. Ο Άλφα είπε ότι ο Βήτα είναι καγκουρό. Ο Βήτα είπε ότι ο Γάμμα είναι ελέφαντας. Ο Γάμμα είπε ότι ο Δέλτα είναι ελέφαντας. Ο Δέλτα είπε ότι ο Έψιλον και ο Άλφα είναι διαφορετικού είδους ζώα. Ο Έψιλον είπε ότι ο Άλφα είναι καγκουρό. Πόσα από τα πέντε αυτά ζώα είναι ελέφαντες;

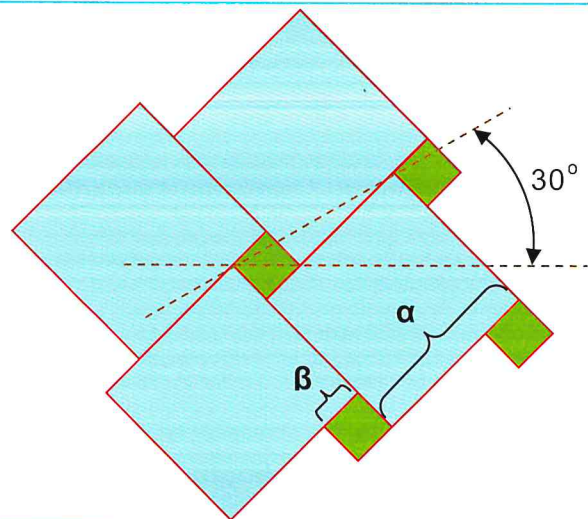
- A) ένα      B) δύο      Γ) τρία      Δ) τέσσερα      E) δεν μπορούμε να ξέρουμε

24) Ένας μαθητής έγραψε στη σειρά μερικούς αριθμούς. Οι πρώτοι τρεις ήσαν οι 1, 2, 3. Από τον τέταρτο και πέρα υπολόγιζε τον κάθε νέο αριθμό εξετάζοντας τους τρεις αμέσως προηγούμενούς του και κάνοντας την εξής διαδικασία: ο τρίτος από αυτούς τους τρεις αφαιρείται από το άθροισμα του πρώτου και του δεύτερου. Το αποτέλεσμα της πράξης είναι ο νέος αριθμός. Έγραψε διαδοχικά τους 1, 2, 3,  $(1+2)-3=0$ ,  $(2+3)-0=5$ ,  $(3+0)-5=-2$ ,  $(0+5)-(-2)=7$ , ... . Πόσο είναι το άθροισμα των πρώτων χιλίων αριθμών της σειράς;

$$a \rightarrow b \rightarrow \gamma \rightarrow a+b-\gamma$$

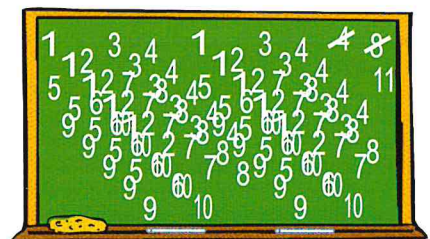
- A) 1500      B) 1501      Γ) -1500      Δ) -1501      E) κανένας από τους προηγούμενους

25) Ο τοίχος είναι στρωμένος με δύο ειδών τετράγωνα πλακάκια πλευρών  $\alpha$  και  $\beta$ , αντίστοιχα, όπως δείχνει το σχήμα. Οι δύο διακεκομμένες γραμμές (η οριζόντια και η πλάγια) σχηματίζουν γωνία  $30^\circ$ . Πόσος είναι ο λόγος  $\frac{\alpha}{\beta}$ ;



- A)  $2\sqrt{3}$       B)  $2+\sqrt{3}$       Γ)  $3+\sqrt{2}$   
 Δ)  $3\sqrt{2}$       E) 2

26) Στον πίνακα είναι γραμμένοι οι φυσικοί αριθμοί από το 1 μέχρι το 10, από δέκα φορές ο καθένας. Ένας μαθητής έσβησε δύο αριθμούς και αμέσως μετά έγραψε στον πίνακα το άθροισμά τους μειωμένο κατά 1. (Π. χ. αν είχε σβήσει τους 4 και 8, θα έγραφε τον 11). Μετά ένας άλλος μαθητής έσβησε δύο από τους αριθμούς που άφησε στον πίνακα ο πρώτος, και έγραψε το άθροισμά τους μειωμένο κατά 1. Η διαδικασία αυτή συνεχίστηκε μέχρι που στο τέλος έμεινε στον πίνακα μόνο ένας αριθμός. Ποιος είναι ο αριθμός που έμεινε;



- A) κάποιος αριθμός μικρότερος του 440      B) 451      Γ) 460  
 Δ) 488      E) κάποιος αριθμός μεγαλύτερος του 500

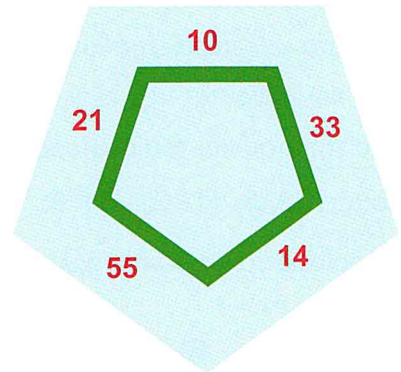
27) Η τιμή της παράστασης

$$\frac{(3+2) \cdot (3^2+2^2) \cdot (3^4+2^4) \cdot (3^8+2^8) \cdot (3^{16}+2^{16}) + 2^{32}}{3^{16}}$$

ισούται με

- A)  $2^{16}$       B)  $2^{32}$       Γ)  $3^{16}$       Δ)  $3^{32}$       Ε)  $2^{16} + 3^{16}$

28) Ο κύριος Διόφαντος ζωγράφισε ένα πεντάγωνο στις πλευρές του οποίου τοποθέτησε φυσικούς αριθμούς. Οποιοδήποτε δύο αριθμοί σε γειτονικές πλευρές του πενταγώνου έχουν κοινό διαιρέτη μόνο τον 1. Οποιοδήποτε δύο αριθμοί που δεν είναι σε γειτονικές πλευρές έχουν κοινό διαιρέτη μεγαλύτερο από 1. Υπάρχουν πολλά τέτοια πεντάγωνα που θα μπορούσε να έχει ζωγραφίσει ο κύριος Διόφαντος. Ένα από αυτά φαίνεται στο σχήμα. Ποιός από τους παρακάτω αριθμούς αποκλείεται να εμφανίζεται σε κάποιο από τα πεντάγωνα του κύριου Διόφαντου;



- A) 15      B) 19      Γ) 21      Δ) 22      Ε) 26

29) Μια συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί για κάθε  $x > 0$  την ισότητα  $2f(x) + 3f\left(\frac{15}{x}\right) = 5x$ . Τότε το  $f(5)$

ισούται με

- A)  $-1$       B) 2      Γ) 3      Δ) 9      Ε) κανένα από τα προηγούμενα

30) Ποιά από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθής, όπου  $n$  φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1;

A) Υπάρχουν αριθμοί της μορφής  $2n+1$  που δεν γράφονται ως άθροισμα το πολύ δύο διαδοχικών φυσικών.

B) Υπάρχουν αριθμοί της μορφής  $3n$  που δεν γράφονται ως άθροισμα το πολύ τριών διαδοχικών φυσικών.

Γ) Υπάρχουν αριθμοί της μορφής  $4n+2$  που δεν γράφονται ως άθροισμα το πολύ τεσσάρων διαδοχικών φυσικών.

Δ) Υπάρχουν αριθμοί της μορφής  $5n$  που δεν γράφονται ως άθροισμα το πολύ πέντε διαδοχικών φυσικών.

Ε) Δεν υπάρχει αριθμός της μορφής  $2^n$  που να γράφεται ως άθροισμα το πολύ πέντε διαδοχικών αριθμών.